

**MULTISKILLED WORKFORCE SCHEDULING FOR BUSINESS WITH  
VARIABLE DEMAND USING THE GRASP ALGORITHM****ALGORITMO GRASP PARA RESOLVER EL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN  
DE HORARIOS EN EMPRESAS DE DEMANDA VARIABLE**

**Ing. David Álvarez Martínez, MSc. Eliana Mirledy Toro Ocampo  
PhD. Ramón Alfonso Gallego Rendón**

**Universidad Tecnológica de Pereira**  
Vereda La Julita, Pereira, Risaralda, Colombia  
Tel.: 57-6-3137122, Fax: 57-6-3137122  
E-mail: {davidalv, elianam, ragr}@utp.edu.co

**Abstract:** We solved the multiskilled workforce scheduling problem for companies of goods or services. The mathematical model is solved using the GRASP algorithm, in the local search phase it uses the method of variable neighborhood search. The methodology is verified through test cases, especially generated for rostering problem. The presented results have very good quality.

**Keywords:** MultiSkilled Workforce Scheduling, GRASP, rostering, variable neighborhood search.

**Resumen:** En este artículo se resuelve el problema de asignación de horarios de personal en organizaciones tanto de producción de bienes como de prestación de servicios donde los cargos son polifuncionales. El modelo matemático es resuelto usando el algoritmo GRASP, en la etapa de búsqueda local se usa el método de búsqueda en vecindario variable. La metodología presentada es corroborada a través de casos de prueba, especialmente generados para el problema de *rostering*. Los resultados obtenidos son de muy buena calidad.

**Palabras clave:** Programación de personal polifuncional, GRASP, rostering, búsqueda en vecindario variable.

## 1. INTRODUCCIÓN

El problema de asignación de horarios donde los cargos son polifuncionales, está presente en una gran variedad de organizaciones tanto de producción de bienes como de servicios, este problema se denomina asignación horaria de empleados multifuncionales del inglés (*MultiSkilled Workforce Scheduling*), MSWS.

En general el problema de asignación de personal requiere una solución donde se indique claramente las labores a realizar, horarios, y días en que se

requiere de los servicios de cada empleado. Las condiciones para cada situación específica difieren entre compañías y países debido a las condiciones de contratación cada organización.

El objetivo fundamental es minimizar los costos de contratación, pero teniendo en cuenta algunas condiciones mínimas como son la atención de la demanda de forma oportuna y el eficiente cumplimiento de las proyecciones de venta a los usuarios finales. En este modelo se respeta la legislación laboral del sitio geográfico donde se esté desarrollando la actividad.

Este problema es considerado NP-Hard, por tanto se justifica el hecho de que la gran mayoría de investigadores que han abordado el problema lo han hecho a través de técnicas heurísticas y metaheurísticas. Es así como Pradenas *et al.*, 2008 resuelve el problema de asignación de supervisores forestales usando búsqueda tabú.

Diego Martín *et al.*, 2008 plantean un modelo lineal entero para asignación de turnos de personal de aerolíneas, en este modelo se descompone el problema en varios subproblemas y se resuelve mediante una técnica exacta de optimización matemática.

Ojeda *et al.*, 2009 plantean un modelo lineal para asignación al relajar el modelo se evidencia la agrupación del personal en turnos. El modelo es descompuesto en dos problemas: uno de operación y otro de inversión. El primero resuelto mediante un problema lineal (PL), el segundo usando un Algoritmo Genético (AG). El resultado entregado por el AG sirve de estructura para el PL. La solución del PL mide la calidad de la alternativa estudiada.

En este artículo se resolverá el problema de asignación de horarios en cadenas de restaurantes usando el algoritmo GRASP. El problema es descompuesto en operación e inversión, el primero es resuelto mediante operaciones aritméticas y el segundo usando el método propuesto. La secuencia de presentación del documento es la siguiente: en la siguiente sección se plantea el modelo matemático del problema bajo estudio, en la sección 3 se presenta la codificación y técnica de solución, en la sección 4 se hace un análisis de resultados y finalmente en la sección 5 se presentan conclusiones y recomendaciones.

## 2. MODELO MATEMÁTICO

El problema planteado consiste en la asignación de horarios que satisfaga una demanda, minimizando el número de personas que ejecuten los cargos. Se consideran periodos de ½ hora como unidad de tiempo, para esta aplicación se toma como base el modelo planteado por Bohórquez (2008). Para esta instancia el modelo es reformulado de tal manera que para la asignación horaria considerará 9 horas de operación al día, se tiene como base demandas por cargo en cada uno de los periodos y se consideran dos tipos de contratación, tiempo completo y jornada variable tipo 1.

La jornada variable tipo 1 considera que el turno máximo a programar no debe exceder de 7 horas y para ambas formas de contratación se deben respetar turnos consecutivos de 3 horas como mínimo.

### 2.1 Función Objetivo

Consiste en minimizar el tamaño de la planta de personal.

$X_{ijkl}$  = Variable binaria que toma el valor de 1 si la persona  $j$  ha sido asignada a una jornada  $i$  (completa o variable), en el período de asignación  $k$  el día  $l$  y 0 en caso contrario.

Donde

$i = 1$  Jornada Completa

$i = 2$  Jornada Variable

$j =$  Cargo principal + cargo secundario ( $j = j_1, \dots, j_f$ )

$k =$  Hora del día ( $K = 1, 2, \dots, HC$ )

$l =$  Día de la semana ( $l = 1, 2, \dots, 6$ )

$HC =$  Hora de cierre del establecimiento

La Ecuación (1) presenta la función objetivo

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=j_i}^{J_f} \sum_{k=1}^{H_c} \sum_{l=1}^6 X_{ijkl} \quad \text{Ec. (1)}$$

### 2.2 Restricciones para el número de horas permitidas en un día

- Restricciones para  $i=1$  jornada completa se plantea la Ecuación (2).

$$\sum_{j=j_i}^{J_f} \sum_{k=1}^{H_c} X_{ijkl} = 16Y_m \quad \forall i=1; l=1, 2, \dots, 6 \quad \text{Ec. (2)}$$

$Y_m$  Representa una variable binaria que toma el valor de 1 si se representa personal de jornada completa y 0 en caso contrario.

- Restricciones para  $i=2$  jornada variable

Las Ecuaciones (3) y (4) determinan el valor de  $W_{jl}$ , esta es una variable binaria que está definida por cada persona de jornada variable del conjunto  $j'$  que va definido  $\{j_1, \dots, j_f\}$  y toma el valor 1 cuando la persona  $j$  ha sido asignada a cualquier periodo  $k$  del horizonte de asignación en el día  $l$ . En otras palabras, la variable es igual a 1 si la persona  $j$  trabajó algún segmento de tiempo el día  $l$ .

$$\sum_{j=j_i}^{j_f} \sum_{k=1}^{HC} X_{ijkl} \geq W_{j'l} \quad \forall i=2; l=1,2,\dots,6 \quad \text{Ec. (3)}$$

$$\sum_{j=j_i}^{j_f} \sum_{k=1}^{HC} X_{ijkl} \leq 16W_{j'l} \quad \forall i=2; l=1,2,\dots,6 \quad \text{Ec. (4)}$$

Para activar las ecuaciones (2, 3 y 4) que corresponden a la cantidad de días que trabaja una persona, se requiere una nueva variable auxiliar binaria  $Z_n$  que activa un grupo de restricciones determinado, si se cumple una condición dada por  $W_{j'l}$ .

La variable  $Z_n$  se define para cada persona del conjunto  $j$ . Si esta variable toma el valor de 0 es porque la condición se cumple y por lo tanto las restricciones asociadas a ella se deben cumplir. El subíndice  $n$  es un número entero consecutivo.

Como es usual en la notación de la programación lineal entera,  $M$  es un número positivo grande, estas consideraciones son llevadas en cuenta en el siguiente conjunto de restricciones.

### 2.3 Restricciones Jornada variable tipo 1

El máximo de medias horas a trabajar es 14. Se formula inicialmente una restricción que indica si la persona está asignada o no todos los días, dada en la Ecuaciones (5), (6) y (7).

$$\sum_{l=1}^6 W_{j'l} - 6 \leq M(1 - Z_n) \quad \forall j' = j'i, \dots, j'f \quad \text{Ec. (5)}$$

Diaria:

$$\left[ \sum_{j=j_i}^{j_f} \sum_{k=1}^{HC(l)} X_{ijkl} - 8Y_{m+1} \right] \leq MZ_n \quad \forall i=2; l=1,2,\dots,6 \quad \text{Ec. (6)}$$

$$\left[ 14Y_{m+1} - \sum_{j=j_i}^{j_f} \sum_{k=1}^{HC(l)} X_{ijkl} \right] \leq MZ_n \quad \forall i=2; l=1,2,\dots,6 \quad \text{Ec. (7)}$$

### 2.4 Restricción para asignar a una persona únicamente a una de las dos jornadas

Se define una variable binaria  $Y_m$  que indica si la persona está contratada tiempo completo y otra variable  $Y_{m+1}$  que corresponde a una persona contratada para tiempo variable, por tanto se plantea una restricción excluyente, Ecuación (8).

$$Y_m + Y_{m+1} = 1 \quad \text{Ec. (8)}$$

### 2.5 Restricciones asociadas a la obligatoriedad de la asignación de horas operativas

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=j_i} X_{ijkl} = a \quad \text{Ec. (9)}$$

$$\forall k = 1, 2, \dots, HC; \forall l = 1, 2, \dots, 6$$

En la Ecuación (9)  $a$  representa el número de personas que se requieren para el cargo  $j$  en la hora  $k$  el día  $l$ , este debe ser un dato de entrada de acuerdo a la demanda proyectada.

### 2.6 Restricciones para evitar las horas paralelas para una misma persona

Cada persona puede realizar varios cargos, por polifuncionalidad, pero esta característica no permite la simultaneidad de las labores. Estas restricciones evitan que a una misma persona, sea asignada dos veces o más, el mismo período de asignación  $k$ , en un mismo día  $l$ .

Se formula la Ecuación (10) para cada una de los cargos principales del conjunto  $j$ .

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=j_i} X_{ijkl} \leq 1 \quad \forall k=1,2,\dots,HC; \forall l=1,2,\dots,6 \quad \text{Ec. (10)}$$

### 2.7 Restricciones que aseguran la consecutividad de mínimo 3 horas en la jornada laboral de una persona

Esta restricción se plantea en la Ecuación (11)

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=j_i} \sum_{p=k}^{k+6} x_{ijpl} \geq 6 \quad \forall l=1,2,\dots,6 \quad \text{Ec. (11)}$$

## 3. CODIFICACIÓN Y TÉCNICA DE SOLUCIÓN

Debido a la gran complejidad matemática del problema planteado se requiere de una técnica heurística o metaheurística para su solución. El método seleccionado es el GRASP (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedures*) (Feo, 1994), con el fin de efectuar una adecuada codificación del problema propuesto se presenta una propuesta buscando un buen desempeño del algoritmo. Con el fin de evaluar el desempeño del algoritmo fueron desarrollados por los autores (Álvarez et al., 2009).

### 3.1 Codificación

Se desea realizar la programación semanal de tareas y horarios de personal incluyendo el tipo de vinculación. Cada persona contratada debe tener la siguiente información: el tipo de contrato, el conjunto de habilidades o cargos que puede desempeñar y el horario de trabajo.

En Bohórquez (2008) se consideran 4 tipos de vinculación, en este estudio sólo se toman en cuenta dos de ellas: tipo de contrato fijo codificado como un 1 y contrato variable tipo 1 se codifica con el número 2.

El conjunto de habilidades o cargos que puede desempeñar un trabajador se codifica a través de números binarios para los k cargos que existan.

Por las restricciones horarias de los contratos un trabajador sólo puede ser programado a lo máximo dos veces al día, ya que como mínimo se le pueden programar 3 horas por turno y máximo en un día se le puede programar 8 horas.

Para esto se codifican los dos turnos por el periodo de entrada para cada turno (1 y 2) y la duración de cada uno de estos. La figura 1 muestra la estructura del vector de contratación de cada empleado.

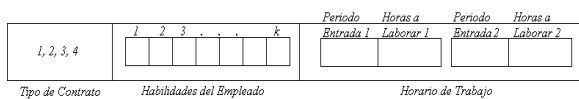


Fig. 1: Vector empleado

La figura 2 representa un posible empleado a contratar, en el ejemplo el empleado será vinculado mediante un contrato variable tipo 1 ya que el elemento tipo de contrato del vector tiene un valor igual a 2, de los 6 diferentes cargos que tiene la empresa este está capacitado para realizar los cargos 1, 3 y 6 y su horario de trabajo está dado por dos turnos, el primer turno comienza desde el tercer periodo de tiempo y tiene una duración de 4 horas y el segundo turno comienza desde el periodo decimotercero y tiene una duración de 3 horas.

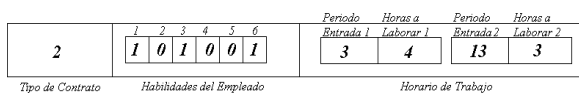


Fig. 2: Ejemplo de un empleado codificado

La tarea desempeñada durante cada periodo de trabajo es un atributo que se codifica mediante un arreglo matricial de 3 dimensiones j, k y l; donde j representa el empleado, k el periodo de día y l el

día de la semana. Por lo tanto la matriz tareas  $(j, k, l) = C$  representa, que el cargo C deberá ser desempeñado por el empleado j en el periodo de tiempo k del día l.

La figura 3 representa gráficamente la matriz de tareas, en la gráfica se asigna el cargo C al empleado 4 para el primer periodo de día 3 (miércoles).

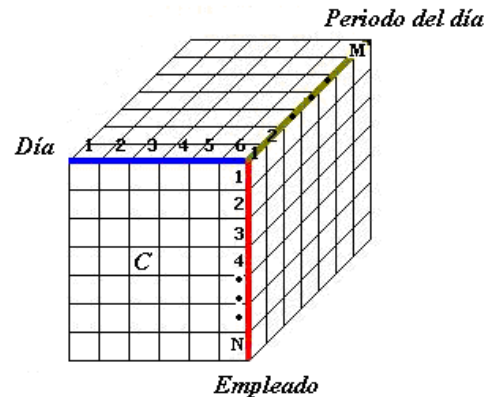


Fig. 3. Matriz de tareas

### 3.2 Algoritmo GRASP

El algoritmo de solución para el modelo matemático presentado en este trabajo es basado en la técnica metaheurística GRASP (Gallego et al., 2008).

El GRASP es una técnica presentada por Feo y Resende (1988), esta ha sido aplicada y enriquecida por los desarrollos realizados en diferentes áreas del conocimiento.

El GRASP consta de 4 grandes etapas denominadas preprocesamiento, construcción, búsqueda local y re-encadenamiento de trayectorias.

La fase de preprocesamiento trata de determinar los esquemas promisorios de solución mediante índices de sensibilidad o algoritmos constructivos (figura 3), la fase de construcción combina métodos basados en sensibilidad con aleatoriedad, para determinar una posible solución factible (figura 4), la fase de búsqueda local explora intensivamente la vecindad de una solución en procura de una mejor solución (figura 5) y la fase de re-encadenamiento de trayectorias combina pares de soluciones de la lista de soluciones elite (buena calidad) para encontrar una mejor solución en la trayectoria de las dos soluciones (figura 6).

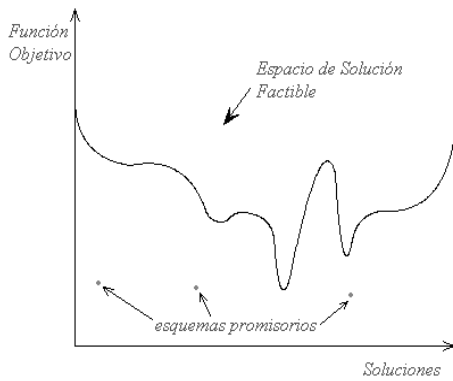


Fig. 3: Fase de preprocesamiento

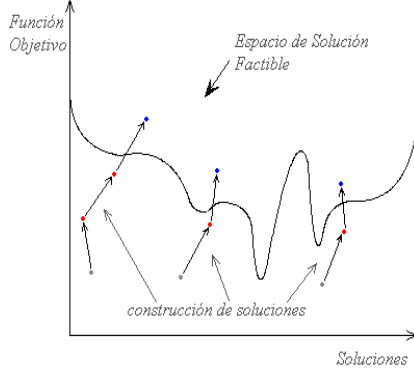


Fig. 4: Fase de construcción de soluciones

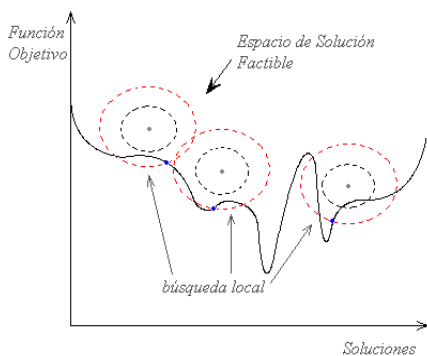


Fig. 5: Fase de búsqueda local

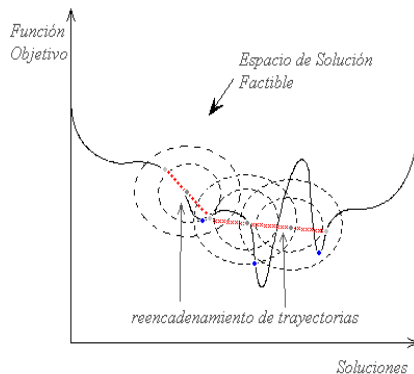


Fig. 6. Fase de re-encadenamiento de trayectorias

### 3.3 Aplicación de la técnica de solución al problema de asignación de horarios

El algoritmo implementado fue particionado en cuatro fases, tal como lo especifica la técnica GRASP: fase de preprocesamiento, construcción, búsqueda local y reencadenamiento de trayectorias.

En las figuras 7, 8 y 9 se explica mediante los diagramas de flujos de datos de los procedimientos seguidos en las etapas de construcción, búsqueda local y reencadenamiento de trayectorias respectivamente.

En la fase de preprocesamiento la matriz de requerimientos se ordena descendientemente por el mayor número de personal requerido, este procedimiento reemplaza el proceso de identificación de esquemas promisorios ya que se pretende dar prioridad a los cargos de mayor demanda

Este es un buen criterio para el arranque del método de solución. Además del algoritmo GRASP en la fase de búsqueda local se establece un algoritmo de búsqueda en vecindario variable (Hansen et al 2003), que permite realizar transiciones cortas en el vecindario.

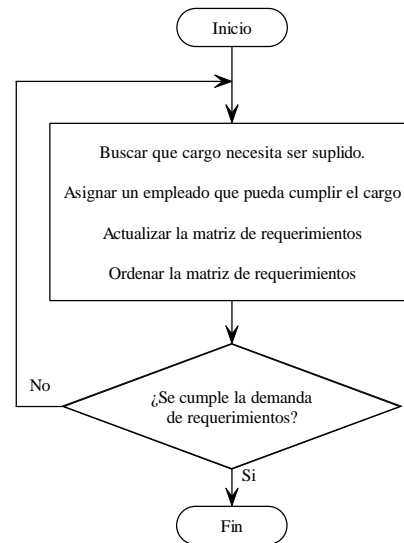


Fig. 7. Diagrama de flujo de datos algoritmo de construcción

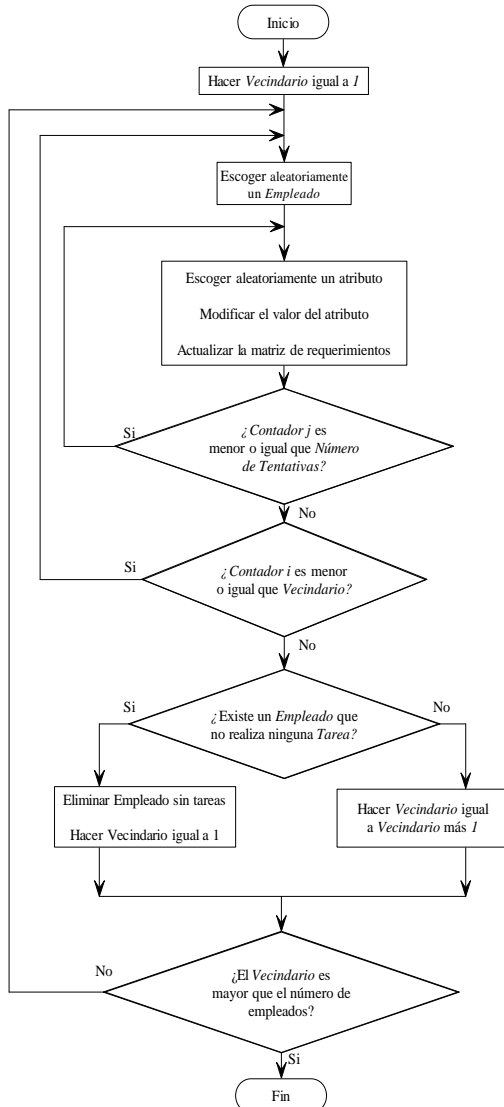


Fig. 8. Diagrama de flujo de datos algoritmo de búsqueda local

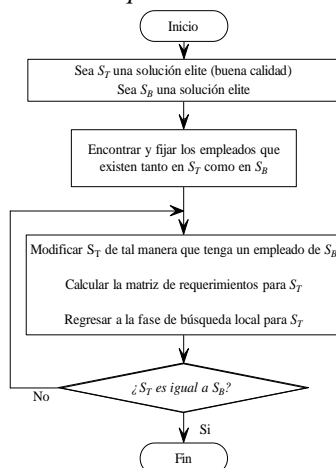


Fig. 9. Diagrama de flujo de datos algoritmo de re-encadenamiento de trayectorias

### 3.4 Validación de la metodología

Para comprobar el modelo matemático propuesto en este trabajo se realizó la implementación en el ordenador y se conformó una librería de casos de prueba (Álvarez et al., 2009); que cuenta con 10 diferentes casos de prueba, en los cuales la complejidad aumenta a medida que crece el tamaño del problema, los problemas van desde 3 cargos y 4 polifunciones hasta 12 cargos y 31 polifunciones, las matrices de requerimientos fueron generadas con valores aleatorios entre 0 a 5, todos los casos cuentan con 18 periodos de tiempo, donde un par de estos representa una hora de trabajo.

El horizonte de tiempo para realizar la asignación de horarios es de un mes. La metodología se desarrolló en MATLAB®, las pruebas se realizaron en un máquina con unas especificaciones cercanas un procesador Pentium® IV 3.0 GHz y una memoria RAM de 1 GB.

### 3.5 Calibración de parámetros

La metodología propuesta consta de dos parámetros el número de tentativas o el número de veces que se realiza cambios en los atributos y el número de arranques de la metodología, ambos parámetros representan un aumento en el tiempo de respuesta de la técnica.

Para el número de tentativas se eligió 20 cambios ya que no se desea realizar una búsqueda exhaustiva, mientras que para el número de arranques fue 10, el cual es un número lo suficiente grande para seleccionar los mejores y realizar el re-encadenamiento de trayectorias.

## 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Para cuantificar el valor de las soluciones encontradas se toma como base el salario mínimo legal vigente en Colombia de \$496.900 mensuales, se considera que el pago del salario incluye todas las prestaciones sociales, por tanto este valor es multiplicado por un factor de 1.52 a partir de allí se obtiene que el valor de la hora a pagar es \$3.934.

En la tabla 1 se muestran los resultados obtenidos en los 10 casos de prueba propuestos la columna denominada personal entrega el número de personas a contratar para cada tipo de contrato.

*Tabla 1. Número de personas a contratar*

Caso	Personal		Horas Contratadas	
	Fijo	Variable Tipo 1	Fijo	Variable Tipo 1
ALV01	4	4	32	20
ALV02	6	6	48	30
ALV03	5	10	40	65
ALV04	8	9	64	42
ALV05	10	17	80	86
ALV06	8	22	64	100
ALV07	15	22	120	118
ALV08	18	35	144	167
ALV09	0	57	0	325
ALV10	0	60	0	351

*Tabla 2. Costos asociados a la contratación*

Caso	Costos		Valor Total de la Contratación (\$)
	Contrato Fijo (\$)	Variable Tipo 1 (\$)	
ALV01	3.021.152	1.888.320	4.909.472
ALV02	4.531.728	2.832.480	7.364.208
ALV03	3.776.440	6.137.040	9.913.480
ALV04	6.042.304	3.965.472	10.007.776
ALV05	7.552.880	8.119.776	15.672.656
ALV06	6.042.304	9.441.600	15.483.904
ALV07	11.329.320	11.141.088	22.470.408
ALV08	13.595.184	15.767.472	29.362.656
ALV09	-	30.685.200	30.685.200
ALV10	-	33.140.016	33.140.016

Estas respuestas se pueden consultar en Álvarez et al. (2009). A continuación se ilustra la contratación para el caso ALV01, tal como aparece en el *summary* de la librería.

En la tabla 3 las columnas corresponden a los siguientes ítems:

C: Tipo Contrato  
P: Polifunción  
HE1: Hora de Entrada 1  
HL1: Horas Laboradas 1  
HE2: Hora de Entrada 2  
HL2: Horas Laboradas 2

*Tabla 3. Contratación propuesta para el caso ALV01*

C	P	HE1	HL1	HE2	HL2
1	4	1	4	11	4
1	4	1	4	9	4
1	4	3	4	11	4
1	3	1	4	11	4
2	4	1	4	9	3
2	4	13	3	-	-
2	3	1	5	-	-
2	3	9	5	-	-

Las respuestas encontradas consideran una operación de lunes a sábado, debido a que el día domingo es el día de mayor demanda, en este caso es necesario incluir empleados dominicales que no son considerados en este trabajo e involucran otro conjunto de restricciones.

## 5. CONCLUSIONES

Se resolvió el problema de asignación horaria de empleados multifuncionales para empresas con demanda variable mediante la técnica GRASP, a partir de las soluciones encontradas se validó el modelo propuesto en cuanto a su funcionamiento verificándose que para cada periodo se cumple con la demanda proyectada, respetando todas las restricciones planteadas.

La codificación propuesta es válida para cualquier técnica heurística o metaheurística. Se recomienda comparar los resultados obtenidos con otras técnicas de optimización.

La inclusión de la técnica de búsqueda en vecindario variable en la fase de búsqueda local del algoritmo GRASP, presentó una gran adaptabilidad mostrando un buen desempeño en el algoritmo implementado.

Fueron propuestos 10 casos de prueba que se inspiraron de situaciones reales observadas en restaurantes de comidas rápidas, que se ponen a disposición de la comunidad académica a fin de validar la metodología propuesta para futuras investigaciones en el tema.

## REFERENCIAS

Gallego R., Escobar A. and Toro E., Técnicas Metaheurísticas de Optimización, Universidad Tecnológica de Pereira, Julio 2008.

- Feo T.A., Resende M.G.C., "Greedy Randomized Adaptive Search Procedures", *Journal of Global Optimization*, vol. 6, 1994, pp. 3-14.
- Hansen P. Nenad M. Moreno J. "Búsqueda de entorno variable". *Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial*. vol.19, pp. 77-92, 2003.
- Álvarez D., Toro E. and Gallego R., Problem instances for the Multiskilled Workforce Scheduling Problem, [Online]. Available: <http://www.utp.edu.co/~planeamiento/dinop/librerias/rostering>
- Bohorquez N., Ampliación del modelo matemático que representa el problema de asignación de personal, formulado actualmente para un restaurante particular, a todos los tipos de restaurantes de la empresa Frisby S.A., Trabajo de grado, 2008, Universidad Tecnológica de Pereira.
- Ojeda R., Domínguez S., Programación lineal para la asignación de personal a horarios de trabajo. Congreso Internacional para la Investigación y el Desarrollo viernes 30 de enero al lunes 2 de febrero de 2009. Veracruz. [Online]. Available: [http://www.colposgrado.edu.mx/memorias/ojeda\\_villagomez.pdf](http://www.colposgrado.edu.mx/memorias/ojeda_villagomez.pdf), review(julio-10-2009).
- Diego F., González J. and Carrasco J. Optimización de cuadrantes de turnos para el personal de atención de vuelos en tierra, XII Congreso de Ingeniería de Organización 2nd International Conference on Industrial Engineering and Industrial Management Burgos, 3-5 de septiembre de 2008.
- Pradenas L, Hidalgo S. and Jensen M., Asignación de supervisores forestales resolución mediante un algoritmo Tabu Search. *Ingeniare. Revista chilena de ingeniería*, vol. 16, N° 3, 2008, pp. 404-414.