

**DEVELOPMENT AND CONTROL OF AN INVERTED PENDULUM WITH
HYDRAULIC ACTUATORS****DESARROLLO Y CONTROL DE UN PENDULO INVERTIDO DE
ACCIONAMIENTO HIDRAULICO**

Ing. Reagan Archila Torres*, **MSc. Katty María Cantero Vergara****
MSc. John Faber Archila Díaz*

*** Universidad Industrial de Santander (UIS)**

Grupo de Investigación en Robótica de Diseño Industrial, GIROD
Cr. 27 con Cl. 9, Ciudadela Universitaria, Bucaramanga, Tel.: (7) 634 4000, Ext.2496.

E-mail: reaganarbey@gmail.com, jfarchid@uis.edu.co

**** Universidad Autónoma de Bucaramanga (UNAB)**

Facultad de Ingenierías Físico mecánicas
Calle 48, No. 39-234, Telef. (57) (7) 643 6111 /643 6261.

E-mail: kcantero@unab.edu.co

Abstract: This article presents the design, construction and control of an inverted pendulum hydraulic driven. The main purpose of this system is to generate and control mechatronic fluctuating loads in any angular position, the work was developed in two stages the first of design and the second of implementation; for stage design tools were used CAD (Computer Aided Design) and CAE (Computer - Aided-Engineering) in the implementation stage is developing the physical-mechanical model, together with the installation of an electrohydraulic system accompanied by a power stage, responsible for amplifying the control signal of the pendulum position and finally This set is automated, from an acquisition system, control and data monitoring (SCADA), the validation system begin from a set-point given by the user through the graphical interface of SCADA, acting on the hydraulic system and this operate the pendulum.

Keywords: Inverted pendulum, mechatronic system, mechanical design, hydraulics, electronics, industrial automation.

Resumen: En el presente artículo se presenta el diseño, construcción y control de un péndulo invertido de accionamiento hidráulico. El propósito principal de este sistema mecatrónico es generar y controlar cargas fluctuantes en cualquier posición angular; el trabajo se desarrollo en dos etapas: la primera de diseño y la segunda de implementación; para la etapa de diseño se utilizaron herramientas CAD (Computer Aided Design) y CAE (Computer - Aided- Engineering), en la etapa de implementación se construyo el modelo físico-mecánico, junto con el montaje de un sistema electrohidráulico acompañado de una etapa de potencia, encargada de amplificar la señal de control de posición del péndulo; finalmente éste conjunto se automatiza, a partir de un sistema de adquisición, control y supervisión de datos (SCADA), el cual posiciona el sistema validando un set-point dado por el usuario a través de la interfaz grafica del SCADA, actuando sobre el sistema hidráulico y éste a su vez sobre el péndulo.

Palabras clave: Péndulo invertido, sistema mecatrónico, diseño mecánico, hidráulica, electrónica, automatización industrial.

1. INTRODUCCION

Desde la creación el hombre ha pretendido optimizar y minimizar el uso de su fuerza física, motivado por esta idea, inicialmente se asocio con otros para aplicar cada uno su fuerza individual a un solo objeto. Posteriormente un ilustre desconocido inventó la rueda y otros la palanca y la cuña. Estos medios mecánicos facilitaron enormemente sus labores, pero aún no eran suficientes los medios disponibles para realizar algunas tareas que requerían de mayor esfuerzo, a mediados del siglo XVII nace la hidráulica, la cual otorga la facultad de transmitir una elevada energía mediante fluidos a presión, por lo tanto en el presente texto se describe el desarrollo de un elemento tangible, que permite ver físicamente la potencia generada.

El péndulo invertido es un mecanismo utilizado para la generación de cargas en diferentes tipos de ángulo, estas cargas son controladas hidráulicamente por medio de la implementación de unas válvulas, que son las encargadas de controlar el comportamiento del fluido permitiendo asegurar una posición angular, dichas cargas no sólo son controladas por estas válvulas sino además por la implementación de un sistema de control, que tiene como fin la determinación de captar la posición angular de péndulo y su ubicación en la posición deseada por un operario.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 Péndulo

Desde los tiempos de Galileo Galilei (1564-1642) se conocen estudios sobre el péndulo. Siendo utilizado como medidor del ritmo en fenómenos de periodo relativamente corto. El primer análisis científico del péndulo fue hecho por Cristian Huygen (1629 – 1695); él contribuyó con la determinación del centro de masa del péndulo real, el cual tiene una masa distribuida demostrando la dualidad entre el péndulo físico y el matemático (péndulo ideal de masa concentrada). Con esto, el problema técnico del péndulo se convirtió en un problema matemático, es decir, fueron los matemáticos quienes estudiaron este tema.

El péndulo llamo la atención del matemático especialmente por una aparente curiosidad: es un elemento mecánico bastante simple y relativamente fácil para realizar experimentos de medición como desplazamiento angular en función del tiempo, $B(t)$, pero obtener esta solución matemáticamente

exacta es improbable, porque hasta hoy día no ha sido posible integrar la respectiva ecuación diferencial no lineal. A raíz de este problema del péndulo se desarrollo una gran cantidad de métodos analíticos para la aproximación de la solución exacta de ecuaciones diferenciales no lineales, debido a la fácil comprobación de dichas soluciones.

Aun la ingeniería moderna encuentra nuevos problemas dinámicos relacionados con vibraciones paramétricas, es decir, el tema es todavía campo de la actividad científica e investigativa, especialmente con el desarrollo de sistemas de computación.

2.2 Sistemas de adquisición de datos

En la actualidad el vertiginoso desarrollo de la electrónica y la microelectrónica han motivado que todas las esferas de la vida humana se estén automatizando, por ejemplo: la industria, el hogar, los comercios, la agricultura, la ganadería, el transporte, las comunicaciones, etc. En todo ese proceso de automatización el microprocesador y el microcontrolador juegan un papel de suma importancia. Ellos han permitido el desarrollo de sistemas inteligentes que resuelven los más diversos problemas, son los llamados Sistemas de Adquisición de Datos.

Un Sistema de Adquisición de Datos no es mas que un equipo electrónico cuya función es el control o simplemente el registro de una o varias variables de un proceso cualquiera, de forma general es la integración de los diferentes recursos que lo integran: Transductores de diferentes tipos y naturaleza, multiplexores, amplificadores, *sample and hold*, conversores A/D y D/A, además el uso del microcontrolador 8051 como CPU del SAD diseñado, utilizando de este microcontrolador todas sus prestaciones: interrupciones, temporizadores, comunicación serie así como hacer uso de memorias y puertos externos y creando con todo ello un sistema que se encargue de una aplicación específica como es chequear una variables (PH, humedad relativa, temperatura, iluminación, concentración, etc.) para una posterior utilización de la misma ya sea con fines docentes, científicos, de almacenamiento o control y utilización de la misma.

3. METODOLOGÍA

El diseño mecatrónico del péndulo invertido es realizado en tres etapas importantes: el diseño mecánico, el modulo de control y el modulo de

electrónica. Estas fases se enlazan para desarrollar el prototipo final, el cual consta de una estructura mecánica, una fase de potencia y un sistema adquisición y procesamiento de datos. Estas etapas se muestran en la Fig. 1.

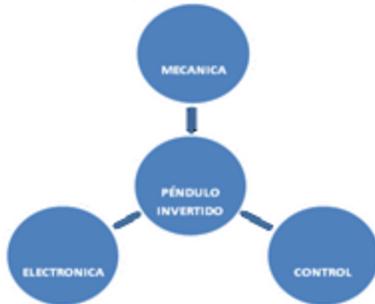


Fig. 1. Etapas del Diseño Mecatrónico. (Archila, 2006)

El diagrama de bloques del diseño realizado se detalla paso a paso en la Figura 2, el cual consta de un sistema de adquisición de datos controlado con un software, el cual está acoplado a una etapa de amplificación y a un sistema hidráulico. La interacción de todos los elementos permite controlar la posición angular del péndulo invertido.

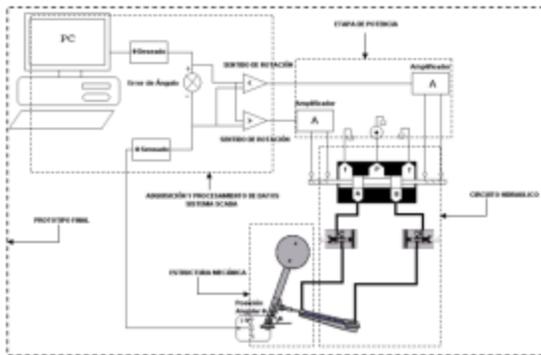


Fig. 2. Diagrama de bloques. (Archila, 2006)

4. DISEÑO MECÁNICO

En el desarrollo del diseño mecánico del péndulo invertido se realizan los análisis correspondientes de movimiento de la geometría del mecanismo (CINEMÁTICA) y fuerzas (CINÉTICA) necesarias para generar el movimiento angular.

4.1 Cinemática del péndulo

En la fase del **Análisis cinemático**, comprende el estudio del movimiento de la geometría, a partir de estos conceptos se construyen las ecuaciones relacionadas con el desplazamiento, la velocidad angular y la aceleración angular del péndulo invertido, figura 3.

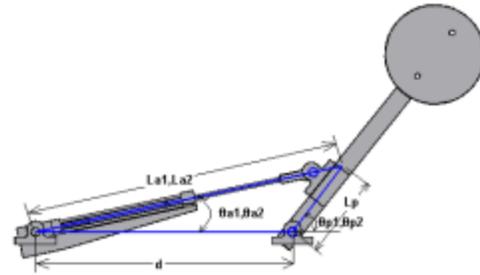


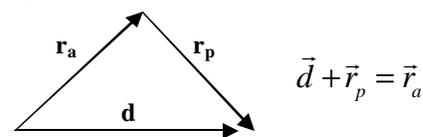
Fig. 3. Distancias y longitudes del péndulo (Archila, 2006)

El diseño del péndulo se realiza partiendo del análisis de los ángulos de inclinación que son de 37° a 153°, y a su vez teniendo en cuenta la distancia que proyecta el actuador.

La posición del péndulo, se obtiene en relación al triángulo formado por la distancia del actuador extendido y retraído con la barra del péndulo.

$$q_{p2} = \pm a \cos\left(\frac{l_a^2 - l_p^2 - d^2}{2dl_p}\right) \Leftrightarrow q_{a2} = \text{asen}\left(\frac{l_p \text{sen } q_{p2}}{l_a}\right)$$

Posteriormente se plantea y se resuelven las ecuaciones de la cinemática tomando las longitudes correspondientes al péndulo y los ángulos que se forman entre sí, mediante la aplicación del método de suma de vectores.



La derivación de dicha expresión permite la obtención de las velocidades.

Velocidad angular del actuador:

$$w_a = \frac{\dot{l}_a \cos(q_a - q_p)}{l_a \text{sen}(q_a - q_p)}$$

Velocidad angular del péndulo:

$$w_p = \frac{\dot{l}_a}{l_p \text{sen}(q_p - q_a)}$$

Tomando la ecuación de la velocidad angular del péndulo y realizando su derivada se obtiene la aceleración angular.

$$a_p = \frac{l_a w_a^2 - w_p^2 l_p \cos(q_p - q_a)}{l_p \text{sen}(q_p - q_a)}$$

4.2 Cinética del péndulo

En la fase del *análisis dinámico*, se estudia la relación existente entre las fuerzas aplicadas al péndulo, su masa y movimiento (Beer y Russell, 2000).

Después del análisis de cinemática se procede a calcular la carga dinámica creada como consecuencia a las inercias. Esta carga es mayor en magnitud de las cargas estáticas o cargas en estado de reposo

Se plantea la ecuación que rige el sistema con base en figura 5, determinando la carga mediante la utilización de momentos en el eje del péndulo y la inercia de las piezas que componen el prototipo virtual.

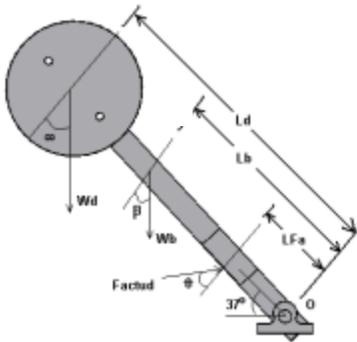


Fig. 5. Distribución de cargas del péndulo.
(Archila, 2006)

$$\sum m_o = I_{totalpend} \cdot a$$

$$\sum m_o = -F_{actual} \cos(\alpha) \cdot LF_a + \dots$$

$$\dots + W_b \cdot \cos(\beta) \cdot (L_b) + W_d \cdot \cos(\infty) \cdot (L_d)$$

4.3 Modelamiento virtual del sistema mecánico

Mediante un software CAD se diseñan varios prototipos virtuales teniendo en cuenta el análisis cinemático y cinético, estas variables son validadas en el programa *Solid Edge*®.

4.3.1 Modelos CAD

Se realizaron 6 modelos CAD que se evaluaron con la metodología del prototipo virtual, debido a las falencias que se encontraban en algunos de ellos se sometieron a modificaciones y restauraciones de las piezas de los mismos, con base en ello se optó por un prototipo mecánico fiable tanto en la parte de costos como en la resistencia de materiales y peso (Mott, 1992).

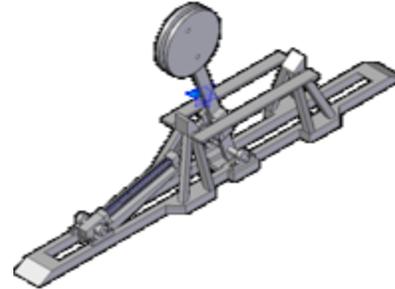


Fig. 6. Péndulo invertido con base en perfil c150 x 15.6 (Archila, 2006)

El diseño de la figura 6 se fundamenta en el análisis de impacto producido por el choque de la barra en el soporte; de acuerdo a datos calculados se observa la necesidad de unos soportes tipo torre de seguridad soldados sobre la base maciza y rígida, los cuales soportan las fuerzas y momentos generados por dicha prueba.

La mayor ventaja del prototipo de la figura 17 es su rigidez, pues gran parte de los materiales utilizados tanto en la base como en los soportes son macizos y robustos, adicionalmente posee dos barras de seguridad, lo cual le permite al diseño resistir cargas mayores; el prototipo se destaca en el campo de la estética. En consecuencia de lo anterior se presentan desventajas relacionadas con su elevado precio (el maquinado de las piezas, base y los materiales utilizados), su incremento en peso y su construcción como una estructura monolítica, lo cual no permite un desensamblé total.

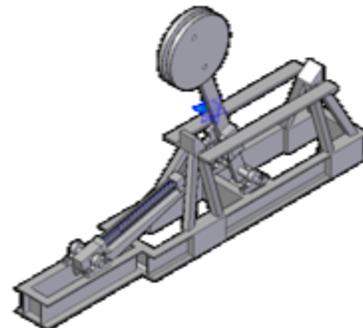


Fig. 7. Péndulo invertido con base en perfil c150 x 15.6 (Archila, 2006)

El diseño de la figura 7 fue el escogido, por presentar una alta resistencia al impacto, además tiene un tamaño moderado y cuenta con una serie de ventajas tales como; el maquinado de las piezas, el empotramiento con la superficie terrestre, el acople, el desensamble de los elementos, el peso de la base 150 kg la cual es liviana con respecto de los anteriores prototipos, El costo de los materiales y su presentación estética.

4.4 Resistencia de materiales

Los análisis de resistencia de las piezas se evaluaron de dos maneras, mediante la simulación con el software de elementos finitos (ANSYS), y con base en los cálculos teóricos, estos resultados se comparan para estimar el grado de certeza. (Beer y Russell, 1993).

4.4.1 Análisis teórico

Diseño por carga de compresión (fig. 8). La barra del péndulo sostiene la masa de los discos, la máxima carga de compresión se presenta cuando el péndulo se detiene en su posición vertical.

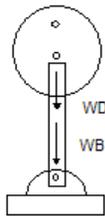


Fig. 8 Carga de compresión en el péndulo. (Archila, 2006)

$$W_{COMP} = W_D + W ; \text{FactorSg} = S_y / s_{COM}$$

$$s_{COM} = F / A$$

▪ **Carga flexión en el eje del péndulo** (figura 9). La máxima carga se da cuando el péndulo esta en posición vertical.

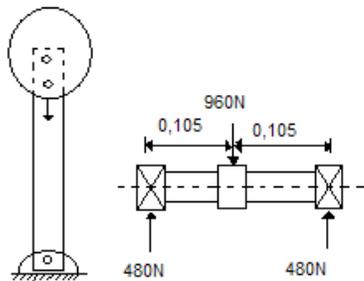


Fig. 9. Diagrama de cargas del eje del péndulo (Archila, 2006)

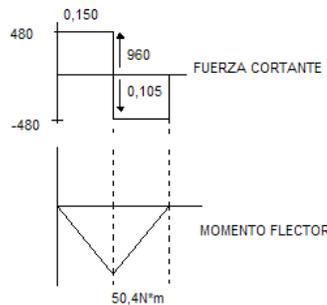


Fig. 10. Diagrama de Cortante y momento flector del eje. (Archila, 2006)

$$s = \frac{Mc}{I}$$

$$c = D/2 = \frac{0,040}{2} = 0,020$$

$$I = (1/2\pi r^4) = 2,51 \times 10^{-7} m^4$$

$$M = 50,4 Nm$$

$$s = 4,010,704,56 pa$$

Para Acero 1020:

$$S_y = 31 Kg / mm^2 \rightarrow 31,000,000 pa$$

$$N_s = \frac{31,000,000}{4,010,704.56} = 7$$

Cortante doble de los pernos (figura 11). Los pernos están cargados a cortante doble y en los orificios se generan fuerzas de abollamiento debido al peso de los discos.

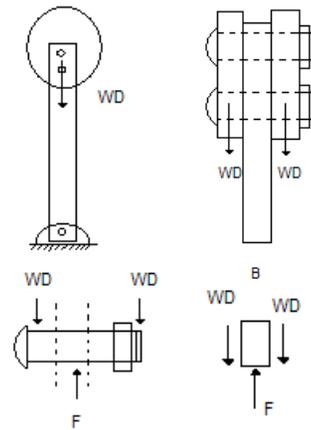


Fig. 11. Diagrama de Cortante de los pernos de los discos. (Archila, 2006)

$$\downarrow + \sum F_y = W_D + W_D - F = 0$$

$$F = 2W_D \rightarrow W_D = \frac{F}{2}$$

$$g_{med} = \frac{F}{2A} = \frac{2W_D}{2A} = \frac{(33,65)}{p(12,7 \times 10^{-3})^2}$$

$$g_{m2d} = 26101844 pa$$

Se utilizan tornillos grado 8 cuyas características son: $S_y = 33000 psi$ entre ? (1/4" - 1/2")

Cortante Adm.

$$s = \frac{S_y}{2} = 16500 psi = 113.757.827,51 pa$$

$$N_s = \frac{s}{g} = \frac{113.757.827}{2.610.184,4} = 43$$

en acero 1020 a fin de disminuir costos, sin afectar la resistencia del prototipo, además algunas piezas están sometidas a esfuerzos considerables por lo tanto se utiliza acero 1045, dichas piezas son el anclaje del péndulo, el cubo que liga el actuador con el eje de la base y los soportes de seguridad que absorben y resisten la carga de impacto. La base del péndulo es de acero estructural y esta recubierta de un galvanizado a fin de minimizar los efectos del proceso de la corrosión.



Fig. 15. Prototipo del péndulo invertido
(Archila, 2006)

5. DISEÑO ELECTRONICO

5.1 Circuito de potencia.

La etapa de control del péndulo requiere la implementación de un circuito de potencia (figura 16), encargado de la alimentación de las bobinas de la válvula direccional; dichas bobinas constan de una resistencia de $19\ \Omega$, requiriendo de una tensión de 24V y corriente de 1.26 Amp. Esta etapa de potencia funciona como acople eléctrico y protección para las tarjetas de adquisición de datos, por consiguiente se implementa un circuito de potencia mediante la cual se asegura la provisión de corriente requerida por las bobinas.

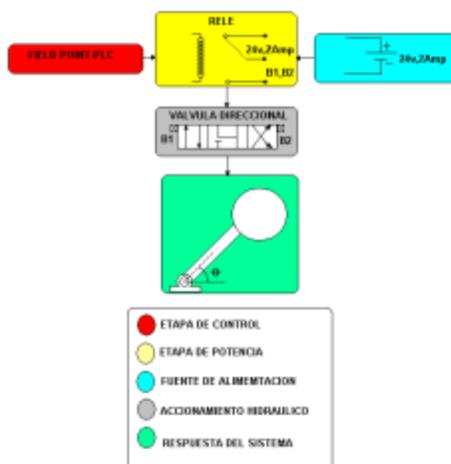


Fig. 16. Organigrama del modulo de potencia
(Archila, 2006)

6. MODULO DE CONTROL

El módulo de control tiene como función posicionar el péndulo en la ubicación deseada por el usuario, siendo posible al cuantificar el error, esto es posible comparando los valores de la variable sensada con la deseada, si dicho error no se encuentra en el setpoint¹, se toma las medidas correctivas para llevarlo hasta el umbral deseado, (Romeo y Vela, 1998), (Mills, 1980), (Lewis y Yang, 1999).

El módulo control está comprendido por una fase de adquisición con un modulo *Field Point*² y una unidad de procesamiento de datos que es este caso es un PC. (Lundberg y Roberge, 2003), (Gordillo y Aracil, 2005), (Romeo y Vela, 1998).

6.1 LABVIEW

El *Labview*[®] es un software utilizado para el diseño de interfases visuales (figura 17) y estructuras de programación, con el cual es posible presentar y procesar los datos recibidos por el sensor del péndulo, y a su vez tomar las decisiones de acuerdo a los datos obtenidos.

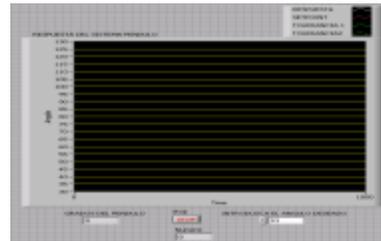


Fig. 17. Interfase visual en Labview
(Archila, 2006)

En el control del péndulo se implementa un programa que realiza el control en su totalidad; el PC es el encargado de la toma de decisiones y el procesamiento de datos a través de la interfase visual, el acondicionamiento de la señal se realiza mediante los módulos de *field point*, (Oliver, *et al.*, 1999).

6.2 Construcción de interfase visual

La interfase visual de Labview (figura 18) consta de una ventana en la cual se grafica: la señal del Sensor que corresponde a la escalera blanca, el

¹ *Setpoint*: posicionamiento angular del péndulo deseado por el usuario

² *Field point*: modulo de adquisición de datos de *National Instruments*

setpoint que es la línea roja y dos franjas paralelas al *setpoint* que corresponden a la tolerancia del error, en el panel de control se encuentra un visualizador digital encargado de mostrar el ángulo final o los valores que se van obteniendo del ángulo sensado en tiempo real, asimismo la ventana grafica esta compuesta por un rango de valores en el eje vertical de 30° a 127°, en el eje horizontal están el tiempo de muestreo de datos y por ultimo un trazado horizontal paralelo al *setpoint*.

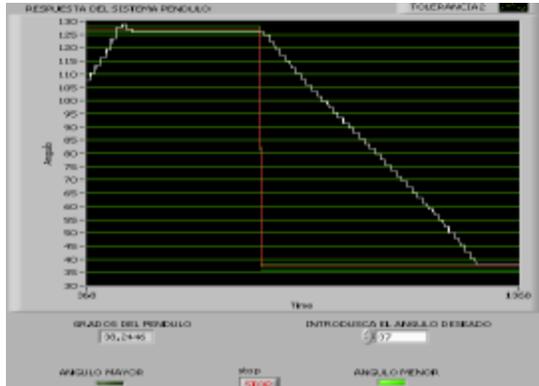


Fig. 18. Características de la interfase gráfica de Labview (Archila, 2006)

El panel de control presenta la opción de fijar el *setpoint* por parte del usuario mediante un botón de edición (*edit button*), este valor no debe exceder ni aminorar el rango permitido para el ángulo del péndulo, lo cual es controlado mediante programación a fin de brindar seguridad a las bobinas de la válvula direccional y el vástago del actuador.

Para finalizar se presentan dos indicadores los cuales representan el estado de las bobinas encendidas o apagadas, es decir la salida activa o desactiva del *field point*, el indicador encenderá mostrando que la bobina de la válvula direccional esta activa.

7. PRUEBAS

7.1 Comprobación de datos teóricos con los prácticos

Uno de los objetivos planteados es la comparación del valor teórico de la fuerza del actuador, la cual resulta de las ecuaciones de momento que rigen el péndulo, esto se puede comprobar, con los valores prácticos o reales determinados en el montaje del sistema hidráulico que permite observar la presión manométrica en el actuador requerida para romper el estado de reposo del péndulo.

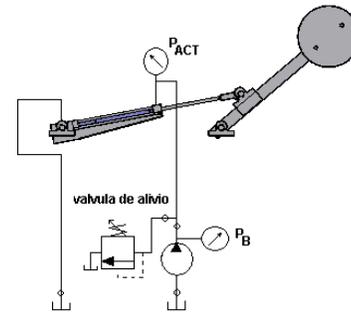


Fig. 19. Circuito de comprobación de datos (Archila, 2006)

El circuito hidráulico requerido para la lectura de la presión se presenta en la fig. 19, constituido de una válvula de alivio, con la cual se permite tarar gradualmente la presión del sistema, hasta el punto en el cual se que sea necesario vencer la inercia, momento en el cual se realiza la lectura de presión en el manómetro de la bomba y en el actuador.

Debido al análisis práctico, se comprobó que la presión necesaria para generar un movimiento en un extremo del péndulo a 37°, fue de 45 bar en el manómetro de la bomba del sistema y 42.3 bar en el manómetro montado en el actuador (lado vástago), la lectura de la presión de bomba incluye las pérdidas, siendo estas aproximadamente de 2.5 bar, siendo ocasionadas por los acoples rápidos de los conectores, la válvula de alivio y las mangueras.

En conclusión se comprueba que el dato de la presión del actuador no difiere considerablemente al valor teórico.

7.2 Señales de respuesta de Labview con los field point

Para el posicionamiento del péndulo se implemento un sistema de control, dicho sistema esta compuesto por una interfase gráfica en Labview, y un modulo *field point* usado como elemento de adquisición de datos, el PC procesa los datos a través de una estructura de programación y genera una señal de salida con la cual se afecta la posición del péndulo mediante los actuadores hidráulicos.

En la implementación del sistema de control se observa en la figura 20 como la respuesta sobrepasa el umbral, es decir que el péndulo supera la posición angular deseada, ocasionando el giro en sentido contrario del péndulo para estabilizar rápidamente el sistema, esto se debe a la latencia en el envío de la señal de control como se observa en el círculo rojo de la figura.

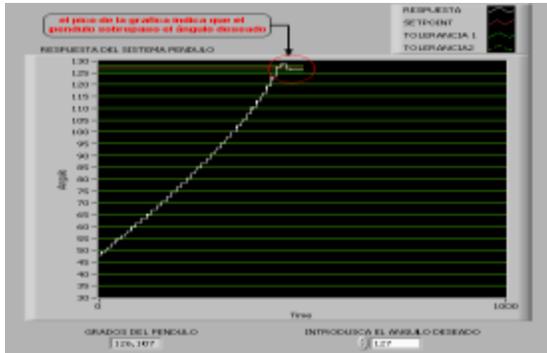


Fig. 20. Respuesta de control con Labview
(Archila, 2006)

Se concluye que la etapa tiene un retardo en el envío de la señal de control como se observa en el círculo rojo de la figura, ocasionando por consiguiente que el ángulo deseado del péndulo no se estabilice rápidamente,

7.3 Cuantificación de la respuesta del sistema de control

Con el prototipo físico se realizaron las correspondientes pruebas, analizando la respuesta del sistema de control del péndulo invertido, obteniendo como resultado un margen de error angular de 0.78° , debido a las características del conversor análogo digital de las tarjetas del *field point*, el cual presenta una resolución 12 bits, es decir que en el sistema tiene una precisión de 0.060% vd (grado por valor digitalizado).

8. CONCLUSIONES

El prototipo final funciona en los ángulos para los que fue diseñado sin ninguna interferencia. Se comprobaron los valores obtenidos por las ecuaciones dinámicas con la lectura del manómetro de presión, que difieren en 0.02 bar.

Se determinó la utilidad de Labview como un software de alta tecnología en el diseño de las interfaces gráficas, el cual en conjunto con los *field point* conforman un adecuado sistema de supervisión. Siempre se debe tener en cuenta el desarrollo de una Metodología, que es de gran importancia a la hora de elaborar un proyecto, en el presente texto se llevo a cabo una metodología del diseño Mecátronico, por que se tuvo en cuenta factores como movimiento rotacional, resistencia de las piezas, control angular y reducción de costos del mismo, por lo tanto fue muy útil en el momento de plasmar el péndulo.

Se concluyó que los programas CAD-CAE utilizados para el diseño y la simulación de estructuras, son la base para construir un modelo mecánico, teniendo presente que estos software permiten la elaboración de prototipos virtuales cuantas veces sea necesario, por lo cual es más fácil elegir una estructura fiable y además cuantificar el costo del proyecto.

AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan su agradecimiento a la VIE de la UIS, por el apoyo y financiación brindado al proyecto titulado “Estudio y diseño conceptual de una ayuda técnica exoesqueleto” código 5546, de donde surge el presente artículo de investigación.

REFERENCIAS

- Beer F., Russell E. *Mecánica de Materiales*. McGraw Hill, 1993.
- Beer F., Russell E. *Mecánica Vectorial para Ingenieros. Dinámica*. McGraw Hill, 2000.
- Archila, R. A. T. “*Diseño y Construcción de un Péndulo Invertido*”. Trabajo de Grado, 2006.
- Beer F., Russell E. *Mecánica Vectorial para Ingenieros. Estática*. McGraw Hill, 1999.
- Mills D. S. “The physical pendulum: A computer-augmented laboratory exercise”. *Am. J. Phys.* 48 (4) April 1980, pp. 314-316
- Lewis P H., Yang C. *Sistemas de Control en Ingeniería*. Editorial Prentice Hall, 1999.
- Mott R. *Diseño de Elementos de Maquinas*. 2ª Edición. Editorial Prentice Hall, 1992.
- Gordillo F., Aracil José. “*El péndulo invertido: un desafío para el control no lineal*”. RIAI, ISSN 1697-7912, Vol. 2, N° 2, 2005.
- Oliver J. P., Fonseca A., Pérez J., Canetti R. “*Síntesis hardware de redes ALN para aplicaciones en control*”. Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información, 8. VIII RPIC. Memorias. Argentina - 23-25 sep 1999.
- Romeo A., Vela A. “*Control de la posición de una bola sobre una barra basculante*”. Seminario Anual de Automática, Electrónica Industrial e Instrumentación, SAAEI-98. Pamplona, España, Sep. 1998.
- Kent H. Lundberg and James K. Roberge. “*Classical Dual-Inverted-Pendulum Control*”. In Proceedings of the IEEE CDC 2003, Maui, Hawaii, December 9-12, 2003, pages 4399-4404.