

LOW COST CAPSUBOT PROTOTYPE CONSTRUCTION**CONSTRUCCION DE UN PROTOTIPO DEL SISTEMA
CAPSUBOT A BAJO COSTO****Ing. Jormany Quintero, PhD. Anna Patete, PhD. Iñaki Aguirre****Universidad de Los Andes, Venezuela**

Facultad de Ingeniería, Escuela de Sistemas, Departamento de Sistemas de Control.

Tel.: +58-274-2402986, Fax: +58-274-2402847

E-mail: jormany@gmail.com, {apatete, iaguirre}@ula.ve

Abstract: This work deals with the construction of the first prototype, in Latin America, of the novel system called Capsubot is presented. The proposed prototype has the quality that it is designed with low cost components. A, simple to implement, control law to generate the Capsubot movement is also proposed. The Capsubot has not external moving parts to produce the movement. Thanks to its design, the Capsubot may be used in several applications.

Keywords: Robot, friction, external propelled robot.

Resumen: En este trabajo se presenta la construcción del primer prototipo, en Latinoamérica, de un sistema novedoso llamado Capsubot. El prototipo que se propone cuenta con la ventaja de ser un sistema diseñado con componentes de muy bajo costo. Adicionalmente se propone una ley de control, sencilla de implementar, para generar el movimiento del Capsubot. El Capsubot tiene la particularidad de no poseer partes móviles externas para generar su desplazamiento. Gracias a la sencillez y dimensiones de su diseño, el campo de aplicación de este sistema es diverso.

Palabras clave: Robot, fricción, robot impulsado externamente.

1. INTRODUCCION

La cápsula robot o Capsubot es un sistema cuyo movimiento no necesita ser generado por partes móviles externas. Está conformado principalmente por una cápsula externa (un cilindro hueco) y una masa interna (un imán), la cual se mueve dentro de la cápsula externa, Fig. 1.

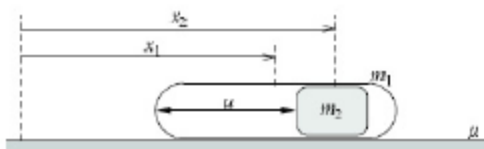


Fig. 1. Modelo de Capsubot.

El Capsubot fue propuesto por primera vez por H. Li, K. Furuta y F. Chernousko (Li *et al.*, 2006). En su investigación, el Capsubot es impulsado por una bobina que genera una fuerza interna, la cual produce el desplazamiento del imán, originando así el movimiento de la cápsula.

El desplazamiento del Capsubot se realiza en una sola dirección. El movimiento se puede describir en cuatro etapas o pasos:

1. Un gran movimiento acelerado de la masa interna hacia atrás, origina un movimiento acelerado hacia adelante de la cápsula externa.
2. Un leve movimiento desacelerado hacia atrás de la masa interna, produce una desaceleración de la cápsula externa.

3. Un pequeño movimiento desacelerado hacia atrás de la masa interna, provoca que la cápsula externa llegue al estado de reposo.
4. Un movimiento lento y constante hacia adelante de la masa interna, mantiene la cápsula externa en estado de reposo. Al finalizar este movimiento el ciclo comienza de nuevo. (Li *et al.*, 2006)

El Capsubot es un tipo de micro-robot que puede ser utilizado para explorar lugares inaccesibles y ambientes complicados para el ser humano, motivo por el cual se han intensificado los estudios de control del mismo.

En la actualidad solamente existen en el mundo dos prototipos del sistema Capsubot. El primero fue diseñado y elaborado por H. Li, K. Furuta y F. Chernousko (Li *et al.*, 2006), el cual cuenta con un solo embobinado. Este tipo de diseño dificulta la generación de los cuatro pasos para el movimiento del Capsubot. El otro, diseñado y construido por N. Lee (Li *et al.*, 2008), utiliza dos embobinados para generar el movimiento, siendo este diseño más conveniente y manejable. Ambos prototipos fueron diseñados e implementados en Tokyo Denki University, en Japón.

Y. Liu, H. Yu, y T. C. Yang (Liu *et al.*, 2008a, 2008b) propusieron un movimiento para el Capsubot, el cual se ejecuta en siete pasos en lugar de cuatro. Además, propusieron diferentes técnicas de control avanzadas para su movimiento. Sin embargo, todos estos estudios se limitaron a los resultados obtenidos a través de simulaciones, debido a que no construyeron prototipo alguno del sistema Capsubot.

En este trabajo, se expone el diseño de un prototipo de Capsubot sencillo y de bajo costo, el cual puede ser utilizado para analizar e implementar los efectos de diferentes tipos de leyes de control sobre este tipo de sistemas robóticos.

La presentación de este trabajo está organizada de la siguiente manera. En la sección 2 se presenta el modelado físico del sistema, así como también se propone una ley de control sencilla de implementar para cumplir con los cuatro pasos que generan el movimiento del Capsubot. El diseño propuesto y la construcción del prototipo del sistema Capsubot se muestran en la sección 3. Los reconocimientos y conclusiones se presentan en las secciones 4 y 5, respectivamente.

2. MODELO DEL SISTEMA

En esta sección se presenta el modelado físico del sistema y se proponen unas leyes de control sencillas, que son utilizadas en cada paso para generar el movimiento del sistema.

Basándose en la Fig 1 y aplicando las leyes de Newton se puede obtener el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum F_1 = m_1 \ddot{x}_1 \quad (1)$$

$$\sum F_2 = m_2 \ddot{x}_2 \quad (2)$$

Donde, m_1 es la masa de la cápsula externa, x_1 es la posición de la cápsula externa, F_1 son las fuerzas que actúan sobre m_1 , m_2 es la masa del cuerpo interno, x_2 es la posición de m_2 , F_2 son las fuerzas que actúan sobre m_2 .

Las fuerzas que actúan sobre el sistema son: la fricción externa, definida como $F_r = \mu N$, donde, μ es el coeficiente de rozamiento entre m_1 y la superficie de contacto, y N es la fuerza normal. Una fuerza interna u , es la que genera el movimiento de la masa interna. La fuerza de fricción entre m_2 y la superficie de contacto es despreciable. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones que describe la dinámica del Capsubot queda expresado de la siguiente manera:

$$u - \text{sign}(\dot{x}_1) \mu N = m_1 \ddot{x}_1 \quad (3)$$

$$-u = m_2 \ddot{x}_2 \quad (4)$$

Donde, $N = (m_1 + m_2)g$, siendo g la gravedad.

Reagrupando los términos, (3) se reescribe como:

$$m_1 \ddot{x}_1 + \text{sign}(\dot{x}_1) \mu (m_1 + m_2)g = u \quad (5)$$

Basándose en el movimiento relativo de la masa interna con respecto a la masa externa, tenemos que:

$$\bar{x}_2 = x_2 - x_1 \quad (6)$$

Así, (4) queda de la forma siguiente:

$$m_2 (\ddot{x}_1 + \ddot{\bar{x}}_2) = -u \quad (7)$$

Despejando $\ddot{\bar{x}}_2$ de (5) y sustituyendo en (7):

$$m_1 m_2 \ddot{\bar{x}}_2 - \text{sign}(\dot{x}_1) m_2 \mu (m_1 + m_2)g = -(m_1 + m_2)u \quad (8)$$

La ley de control, que se propone, es calculada en base a las diferentes condiciones que deben cumplirse para que se genere el movimiento del sistema.

Para que se cumpla el primero de los cuatro pasos, descritos anteriormente, se debe diseñar una ley de control en esta primera etapa tal que:

$$\ddot{\bar{x}}_2 \square 0 \text{ produce } \ddot{x}_1 > 0 \quad (9)$$

Despejando \ddot{x}_1 de (5) y tomando en cuenta las condiciones en (9), se tiene,

$$\ddot{x}_1 = \frac{u - \text{sign}(\dot{x}_1) \mathbf{m}(m_1 + m_2)g}{m_1} > 0 \quad (10)$$

Despejando \ddot{x}_2 de (8) y cumpliendo con (9),

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{x}}_2 &= \frac{-(m_1 + m_2)u}{m_1 m_2} + \\ &\frac{\text{sign}(\dot{x}_1) m_2 \mathbf{m}(m_1 + m_2)g}{m_1 m_2} \square 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Despejando u de las inecuaciones (10) y (11), resulta que una ley de control de la forma:

$$u > \mathbf{m}(m_1 + m_2)g \quad (12)$$

cumplirá con las condiciones de la primera etapa, descritas en (9).

En la segunda etapa se desea que:

$$\ddot{\bar{x}}_2 > 0 \text{ produce } \ddot{x}_1 < 0 \quad (13)$$

Análogamente a la etapa anterior, usando (10), (11) y (13) se tiene que una señal de control de la forma:

$$u < \mathbf{m}m_2g \quad (14)$$

cumple con las condiciones dadas en (13).

En la tercera etapa tenemos que:

$$\ddot{\bar{x}}_2 > 0 \text{ produce } \dot{x}_1 = 0 \quad (15)$$

En este caso la ley de control que cumple con las condiciones en (15) viene dada por:

$$u = -\mathbf{m}(m_1 + m_2)g \quad (16)$$

Para la cuarta etapa

$$\ddot{\bar{x}}_2 \leq \mathbf{e} \text{ produce } \dot{x}_1 = 0 \quad (17)$$

donde $\mathbf{e} \rightarrow 0$. En este caso se escoge una ley de control como una señal escalón positiva que cumpla con las condiciones en (17), es decir:

$$u = \mathbf{m}(m_1 + m_2)g \quad (18)$$

Teniendo en cuenta las condiciones mínimas para que se produzca el movimiento del sistema, se escoge una entrada continua a trozos y periódica que cumpla con las mismas. Para el primer tramo,

dado entre los tiempos t_0 y t_1 , tenemos de (12) que u_1 es:

$$u_1 > \mathbf{m}(m_1 + m_2)g \quad (19)$$

Para el segundo tramo, comprendido entre t_1 y t_2 , basándose en (14) se toma la entrada u_2 :

$$u_2 < \mathbf{m}m_2g \quad (20)$$

En el tercer tramo, correspondiente a los tiempos entre t_2 y t_3 , se toma u_3 como en (16) y en el tramo cuatro, comprendido entre t_3 y t_4 , se escoge como señal de entrada, u_4 , definida como en (18). Así:

$$u_3 = -\mathbf{m}(m_1 + m_2)g \quad (21)$$

$$u_4 = \mathbf{m}(m_1 + m_2)g \quad (22)$$

Las señales de control para cada paso o etapa son muy sencillas de implementar, ya que constan solamente de escalones de diferente amplitud, y así se logra generar el movimiento para el desplazamiento del sistema.

3.1 Simulaciones

Antes de construir el sistema, se simula numéricamente el mismo para comprobar que las leyes de control propuestas, en cada etapa, efectivamente generan el movimiento del sistema.

Se toman como condiciones iniciales los siguientes valores:

$$x_1(0) = 0, \quad \bar{x}_2(0) = a, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{\bar{x}}_2(0) = 0, \quad \text{donde } a > 0.$$

Los valores de los parámetros se definen en la Tabla 1. La Fig. 2 muestra la posición de las masas. A través de esta simulación se observa que la cápsula avanza 0.0068m cada 0,16s aproximadamente. Las velocidades de las masas se muestran en las Fig. 3 y Fig. 4, respectivamente. La señal de control propuesta se observa en la Fig. 5.

Tabla 1: Valores de los parámetros del sistema

m_1	masa de la cápsula	0.0147Kg
m_2	masa del imán	0.0094Kg
g	gravedad	9.81m/s ²
\mathbf{m}	coeficiente de fricción	0.5
a	posición inicial	0.001m

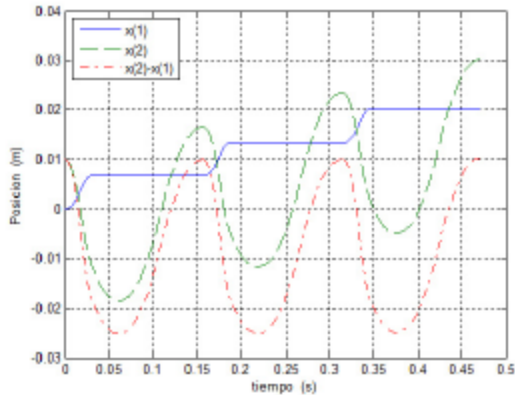
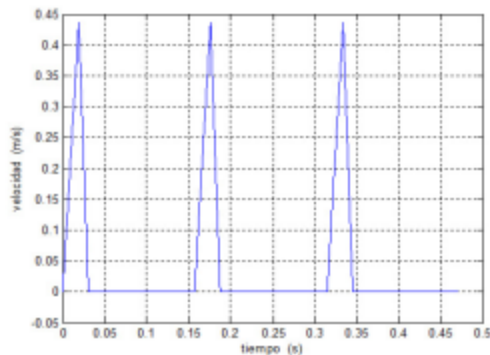
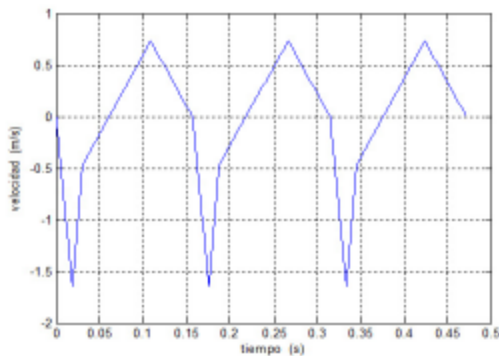
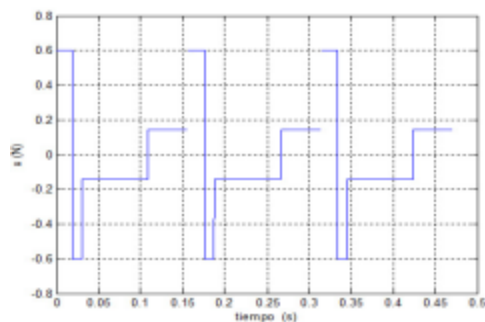


Fig. 2. Posición de las masas.

Fig. 3. Velocidad de la masa m_1 .Fig. 4. Velocidad de la masa m_2 .Fig. 5. Señal de control u .

Se puede observar a través de los resultados simulados, que las leyes de control propuestas para cada etapa efectivamente logran generar el movimiento deseado del Capsubot.

3. DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DEL SISTEMA CAPSUBOT

Una de las limitaciones en la construcción de prototipos de sistemas robóticos se debe a los altos costos de sus componentes. El diseño que se presenta a continuación busca reducir los costos de los componentes necesarios en el sistema Capsubot, de tal manera de proponer un prototipo sencillo y factible económicamente.

4.1 Componentes con los que cuenta el Capsubot

Para la construcción del prototipo propuesto en este trabajo, se requieren los siguientes componentes o materiales:

Imán Ferromagnético: Este componente es la masa m_2 , la cual se mueve dentro de m_1 . Esta pieza tiene forma cilíndrica, con las siguientes dimensiones: 0.014m de diámetro, 0.012m de altura y una masa de 0.0094Kg.

Jeringa de 20cc: Este componente representa la masa m_1 , es un cuerpo cilíndrico con un diámetro adecuado para que en su interior se pueda realizar el desplazamiento de la masa m_2 . Su masa es de 0.0058Kg, un diámetro de 0.02m y una longitud de 0.09m, lo cual ayuda con facilidad su movimiento.

Alambre de cobre calibre 36 para bobinas: Alambre por el cual circula la corriente que genera el campo magnético, responsable del movimiento de la masa m_2 . La cantidad usada de este material es de 40m aproximadamente, lo cual corresponde un aporte de masa de 0.0089Kg.

Fuente de poder variable: Es el equipo que produce la energía para el movimiento del sistema.

Multímetro: Instrumento de medida usado para obtención de algunas magnitudes físicas como voltaje, corriente y resistencia eléctrica.

Dinamómetro: Instrumento usado para la obtención de medidas de fuerzas mecánicas.

Pegamento de tipo industrial: Insumo usado para proporcionar la adhesión de la bobina a la cápsula de plástico.

Con estos materiales, se propone la construcción de un prototipo del sistema Capsubot, el cual cuenta con dos bobinas (o solenoides) enrolladas alrededor de la jeringa, como se muestra en la Fig. 6. Las bobinas producirán campos magnéticos deseados para generar el movimiento adecuado de la masa m_2 .

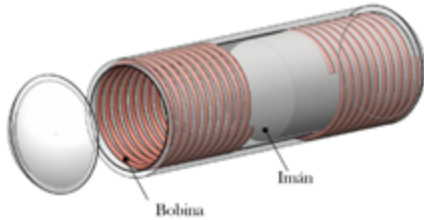


Fig. 6. Diseño del sistema Capsubot.

4.2 Costo y disponibilidad de los materiales

El costo de los materiales es relativamente económico. El imán fue adquirido en tiendas de electrónica con un valor económico de BsF. 3.50 (\$ 1.63).

El valor económico de la jeringa de 20cc está en las farmacias alrededor de los BsF. 2.50 (\$ 1.16).

El alambre especial para hacer la construcción del solenoide fue adquirido a un costo de BsF. 1.20 (\$ 0.56) por cada 0.0089Kg de alambre.

Para la construcción del prototipo fue necesario una unidad de pegamento industrial "Pega loka 3" de 0.003Kg con un costo de BsF. 4.50 (\$ 2.10).

El multímetro, la fuente de poder y el dinamómetro son facilitados por el laboratorio de Física 1 y Física 2 de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes.

Se puede observar como la mayoría de los materiales son de fácil adquisición y de disposición inmediata, como es el caso de la jeringa, el imán y el alambre de cobre los cuales son esenciales para la construcción del sistema.

4.3 Factibilidad económica

La factibilidad económica se observa en los costos de los materiales adquiridos, los cuales hacen una inversión total para el prototipo de BsF. 11.70 (\$ 5.44). Al comparar este monto con el de otros prototipos de sistemas físicos, se puede decir que la construcción es sumamente económica y la inversión para su realización es mínima.

4.4 Construcción del prototipo

Debido a la inexistente relación directa entre las unidades de campo magnético y fuerzas mecánicas, se busca de manera aproximada, una relación directa para obtener diferentes fuerzas a diferentes campos magnéticos, variando la intensidad de corriente para una bobina fija. Esta relación es obtenida de manera práctica usando un dinamómetro y una bobina, como la que se muestra en la Fig. 7, y que cuenta con las siguientes especificaciones: alambre de calibre 0.5" ó 0.0016 m, enrollado sobre una longitud de 0.148m, lo cual hace un total de 540 vueltas, distribuidas en 5 capas, cada una con 110 vueltas; el área transversal de la bobina es de 0.0010839 m², con un diámetro de 0.03715 m. La resistencia del solenoide es de 1 Ω aproximadamente e inductancia igual 0.004 H.



Fig. 7. Bobina de experimento.

El procedimiento usado fue el siguiente: primeramente se mide el peso del imán, luego se hacen circular diferentes intensidades de corriente para obtener distintas intensidades de campo magnético en la bobina.

Se mide entonces la fuerza que ejerce este campo magnético sobre el imán, ver Fig. 8. A los valores medidos se le debe restar el peso del imán para su corrección. La experiencia se realizó para un total de 23 datos, los cuales se muestran en la Tabla 2.



Fig. 8. Experimento: relación campo magnético vs. fuerza.

Aplicando el método de mínimos cuadrados a los datos obtenidos en la Tabla 2, como se muestra en la Fig. 9, se obtiene una relación directa entre el campo magnético y la fuerza. La relación obtenida es la siguiente:

$$F = 37375B - 0.0016 \quad (23)$$

Donde F es el valor de la fuerza en Newton y B es el campo magnético generado por la bobina en Tesla.

Para la construcción del prototipo se sigue el diseño de dos bobinas presentado en la Fig. 6. Estas bobinas son construidas con las siguientes especificaciones:

Tabla 2: Datos de corriente, voltaje y fuerza

Corriente (A)	Voltaje (V)	Fuerza (N)
0.4	0.45	0.005
0.5	0.55	0.005
0.9	1.0	0.015
1.2	1.4	0.020
1.3	1.5	0.020
1.4	1.6	0.025
1.7	1.9	0.025
1.9	2.2	0.030
2.0	2.3	0.030
2.2	2.5	0.040
2.4	2.5	0.040
2.6	3.0	0.045
2.8	3.5	0.045
3.0	3.5	0.050
3.1	3.5	0.055
4.0	4.5	0.065
4.4	5.0	0.070
4.8	5.5	0.080
5.2	6.5	0.085
5.6	7.0	0.090
6.0	7.5	0.105
6.4	8.0	0.110
7.0	9.0	0.120

La bobina 1 (Fig. 6, embobinado a la derecha), posee una inductancia de 0.00089 H, presenta una resistencia de 15.62ohms, su largo es de 0.0219 m, el área transversal es de 0.0003142 m² y tiene 365 vueltas aproximadamente.

La bobina 2 (Fig. 6, embobinado a la izquierda), posee una inductancia de 0.000817H, la resistencia es de 13.66ohms, tiene 0.0201m de largo, el área transversal es de 0.0003142 m² y tiene 300 vueltas aproximadamente.

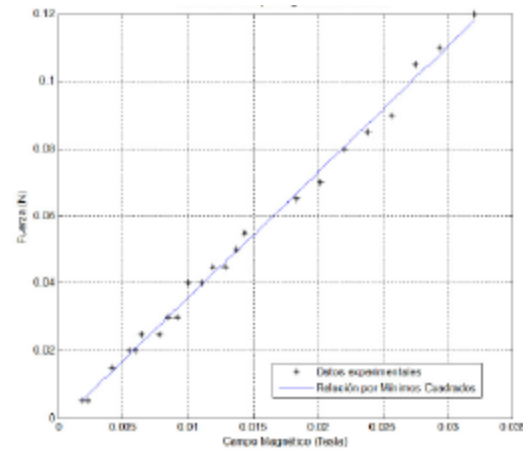


Fig. 9. Relación campo magnético vs. fuerza.

Estos solenoides son escogidos con estas características para que sean capaces de producir un campo magnético lo suficientemente adecuado, para generar el movimiento del sistema de la forma deseada.

La ubicación de las bobinas en la cápsula se escoge siguiendo el diseño propuesto. La bobina 1 se ubica en el extremo derecho de la capsula para así facilitar el movimiento del imán dentro de la misma. La bobina 2 se encuentra ubicada junto a la bobina 1 (del lado izquierdo). La posición central de la bobina 2 es la posición inicial de la masa interna, es decir; en la posición central de la bobina 2 es donde el imán comienza su movimiento periódico. La posición inicial del imán se escoge experimentalmente para producir el mayor desplazamiento de la cápsula.

Primeramente, el imán recorre una distancia de 0.02m aproximadamente dentro de la cápsula con movimiento acelerado, al energizar la bobina 1, permitiendo salir al sistema de su estado de inercia; esto genera el primer movimiento de la cápsula. Sucesivamente los otros dos pasos para desacelerar la masa interna son realizados por la misma bobina (bobina 1).

Desactivando la bobina 1 y energizando la bobina 2, se regresa el imán a su posición inicial. En la Fig. 10 se muestra el prototipo construido.



Fig. 10. Prototipo del sistema Capsubot.

La puesta en funcionamiento del sistema permite comparar los resultados prácticos con aquellos aportados por las simulaciones. En la práctica se usan dos fuentes de corriente, una controla la corriente de la bobina 1 y la otra controla la corriente de la bobina 2, la cuales llamaremos fuente 1 y fuente 2 respectivamente. En la fuente 1 se usa una corriente de 0.8Amp para generar el movimiento acelerado y en la fuente 2 una corriente de 0.5Amp para regresar el imán a su posición inicial.

Experimentalmente, el prototipo construido se mueve 0.008m en 1.5s aproximadamente. Estos resultados difieren de los resultados teóricos principalmente debido a que el coeficiente de fricción es un valor estimado. Otra razón, influyente en el tiempo que tarda el Capsbot en completar los cuatro pasos (un ciclo), es que experimentalmente la señal de control se genera a través del intercambio manual (encendido o apagado) de las fuentes de poder para producir los campos de energía en una bobina u otra. Adicionalmente, las mediciones experimentales de las posiciones de las masas y los tiempos, son obtenidas a través del análisis, cuadro a cuadro, de videos tomados del movimiento del Capsbot sobre papel milimetrado durante la ejecución del experimento.

4. RECONOCIMIENTO

Los autores desean agradecer la colaboración brindada por el MSc. Namkom Lee de Tokyo Denki University, Japón.

5. CONCLUSIONES

Un nuevo prototipo del sistema Capsbot ha sido propuesto, construido y validado experimentalmente. El prototipo cuenta con la ventaja de ser un sistema de muy bajo costo, haciéndolo un prototipo factible económicamente para el análisis e implementación de leyes de control.

Una ley de control sencilla de implementar, para generar el movimiento del Capsbot fue propuesta, con la finalidad de validar experimentalmente el prototipo del Capsbot.

Se pretende que a partir de este prototipo diseñado aumente la construcción de Capsbots en el mundo y por ende la investigación sobre este tipo de robots que no poseen partes móviles externas para generar su desplazamiento.

REFERENCIAS

- Li, H., Furuta, K. & Chernous'ko., F. L. (2006), "Motion Generation Of A Capsule Robot Using Internal Force And Static Friction". In Proc. of IEEE Conf. Decision and Control, San Diego CA, USA, pp. 575-580.
- Lee, N., Kamamichi, N., Li, H. y Furuta, K. (2008). "Control System Design and Experimental Verification of Capsbot". In Proc. of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Nice, Francia, pp. 1927-1932.
- Liu, Y., Yu, H. & Yang, T. C. (2008a). "Analysis and Control of a Capsbot". In Proc. of 17th World Congress The International Federation of Automatic Control, Seoul, Korea, pp. 756-761.
- Liu, Y., Yu, H. & Vladereanu, L. (2008b). "An Iterative Learning Control Scheme for the Capsbot". Proc. of the UKACC International Conference on Control 2008.

ANEXOS

Las demostraciones de las leyes de control, para cada tramo, obtenidas en la sección 2 se muestran a continuación.

Demostración en la primera etapa:

Despejando u de las ecuaciones (10) y (11), resulta:

$$u > \text{sign}(\dot{x}_1) \mathbf{m}(m_1 + m_2)g \quad (24)$$

$$u \gg \text{sign}(\dot{x}_1) \mathbf{m}m_2g \quad (25)$$

respectivamente. Así:

$$u > \mathbf{m}(m_1 + m_2)g \quad (26)$$

Como el movimiento de m_1 se realiza en dirección positiva, entonces $\dot{x}_1 > 0$.

$$u > \mathbf{m}(m_1 + m_2)g \quad (27)$$

$$u \gg \mathbf{m}m_2g \quad (28)$$

Se puede observar que los valores de u que cumplen con las condiciones planteadas en (9) son los que satisfacen la inecuación (27).

Demostración en la segunda etapa:

Despejando \ddot{x}_1 de la ecuación (5) se tiene:

$$\ddot{x}_1 = \frac{u - \text{sign}(\dot{x}_1) \mathbf{m}(m_1 + m_2)g}{m_1} < 0 \quad (29)$$

Despejando \ddot{x}_2 de la ecuación (8) se tiene:

$$\ddot{x}_2 = \frac{-(m_1 + m_2)u}{m_1 m_2} + \frac{\text{sign}(\dot{x}_1) \mathbf{m}(m_1 + m_2)m_2 g}{m_1 m_2} > 0 \quad (30)$$

Despejando u de las ecuaciones (29) y (30), resulta respectivamente:

$$u < \text{sign}(\dot{x}_1) \mathbf{m}(m_1 + m_2)g \quad (31)$$

$$u < \text{sign}(\dot{x}_1) \mathbf{m}m_2 g \quad (32)$$

Así:

$$u < \mathbf{m}(m_1 + m_2)g \quad (33)$$

$$u < \mathbf{m}m_2 g \quad (34)$$

Como puede observarse la ecuación (34) cumple con las condiciones en (13).

Se supone una entrada tipo rampa de pendiente negativa en esta etapa para mantener la simetría con la etapa anterior, definida sólo para valores negativos, estos valores satisfacen entonces las inecuaciones (33) y (34).

Demostración en la tercera etapa:

Despejando \ddot{x}_1 de la ecuación (5) se tiene:

$$\ddot{x}_1 = \frac{u - \text{sign}(\dot{x}_1) \mathbf{m}(m_1 + m_2)g}{m_1} = 0 \quad (35)$$

Se integra la ecuación anterior para obtener la expresión de la velocidad de la masa m_1 asumiendo u como una función constante.

$$\dot{x}_1(t) = \int_{t_i}^{t_f} \ddot{x}_1(t) dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{u(t) - \text{sign}(\dot{x}_1) \mathbf{m}(m_1 + m_2)g}{m_1} dt \quad (36)$$

Donde t_i es el tiempo donde comienza esta etapa y

t_f es el tiempo donde termina.

$$\dot{x}_1 = \left(\frac{u - \text{sign}(\dot{x}_1) \mathbf{m}(m_1 + m_2)g}{m_1} \right) (t_1 - t_0) = 0 \quad (37)$$

Despejando \ddot{x}_2 de la ecuación (8) se tiene:

$$\ddot{x}_2 = \frac{-(m_1 + m_2)u}{m_1 m_2} + \frac{\text{sign}(\dot{x}_1) (m_1 + m_2) m_2 g \mathbf{m}}{m_1 m_2} > 0 \quad (38)$$

Despejando u de las ecuaciones (37) y (38), resulta respectivamente:

$$u = \text{sign}(\dot{x}_1) \mathbf{m}(m_1 + m_2)g \quad (39)$$

$$u < \text{sign}(\dot{x}_1) \mathbf{m}m_2 g \quad (40)$$

Así:

$$u = \mathbf{m}(m_1 + m_2)g \quad (41)$$

$$u < \mathbf{m}m_2 g \quad (42)$$

Sustituyendo (41) en (42),

$$\mathbf{m}(m_1 + m_2)g < \mathbf{m}m_2 g \quad (43)$$

$$(m_1 + m_2) < m_2 \quad (44)$$

$$m_1 < 0 \quad (45)$$

La inecuación (41) no se puede cumplir ya que m_1 es un parámetro físico mayor que cero.

Por lo tanto, se escoge u como una señal escalón negativa, esto implica que:

$$u < -\mathbf{m}m_2 g \quad (46)$$

$$u = -\mathbf{m}(m_1 + m_2)g \quad (47)$$

Como puede observarse la ecuación (47) cumple con las condiciones en (15).

Demostración en la cuarta etapa:

Análogamente a la etapa anterior se obtiene la ecuación (35) para $\dot{x}_1 = 0$

Despejando \ddot{x}_2 de la ecuación (8) se tiene:

$$\ddot{x}_2 = \frac{-(m_1 + m_2)u}{m_1 m_2} + \frac{\text{sign}(\dot{x}_1) (m_1 + m_2) m_2 g \mathbf{m}}{m_1 m_2} \leq e \quad (48)$$

Despejando u de las ecuaciones (35) y (48), resulta respectivamente:

$$u = \text{sign}(\dot{x}_1) \mathbf{m}(m_1 + m_2)g \quad (49)$$

$$u \geq \text{sign}(\dot{x}_1) \mathbf{m}m_2 g + \frac{e m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (50)$$

Así:

$$u = \mathbf{m}(m_1 + m_2)g \quad (51)$$

$$u \geq \mathbf{m}m_2 g + \frac{e m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (52)$$

De (48),

$$-(m_1 + m_2)u + \text{sign}(\dot{x}_1) m(m_1 + m_2)m_2g \leq m_1m_2e \quad (53)$$

$$-(m_1 + m_2)u \leq m_1m_2e - \text{sign}(\dot{x}_1) m(m_1 + m_2)m_2g \quad (54)$$

$$u \geq \text{sign}(\dot{x}_1) m m_2g - \frac{m_1m_2e}{m_1 + m_2} \quad (55)$$

$$u \geq m m_2g - \frac{m_1m_2e}{m_1 + m_2} \quad (56)$$

Como puede observarse (51) cumple con las condiciones en (17).

Para hallar un valor de e tal que:

$$m(m_1 + m_2)g \geq m m_2g - \frac{e m_1m_2}{m_1 + m_2} \quad (57)$$

$$m(m_1 + m_2)^2g \geq m m_2g(m_1 + m_2) - m_1m_2e \quad (58)$$

$$\frac{m m_2g(m_1 + m_2)}{m_1m_2} - \frac{m m_2g(m_1 + m_2)^2}{m_1m_2} \leq e \quad (59)$$

Así:

$$e \geq \frac{m m_2g(m_1 + m_2)}{m_1m_2} - \frac{m m_2g(m_1 + m_2)^2}{m_1m_2} \quad (60)$$

Como

$$\frac{m m_2g(m_1 + m_2)^2}{m_1m_2} > \frac{m m_2g(m_1 + m_2)}{m_1m_2} \quad (61)$$

e siempre es negativo.

Así cualquier valor de $e \rightarrow 0$, negativo, cumple con las condiciones. Se escoge u como una señal escalón positiva, como en (51).