

RELIABILITY EVALUATION OF A GROUP OF 3 PUMPS WITH MARKOV CHAIN MODEL

EVALUACIÓN DE CONFIABILIDAD DE UN GRUPO DE 3 BOMBAS CON CADEMÁS DE MARKOV

Ing. Carolina Casanova, PhD. Cesar Contreras

Universidad Nacional Experimental del Táchira

Laboratorio de Instrumentación, Control y Automatización, Decanato de Investigación,
Venezuela, E-mail: ccontre@unet.edu.ve

Abstract: Different methodologies exist to analyze the reliability of a system, in this work describes the analysis with Markov chain model and an example is done evaluating and simulating the reliability of a group of 3 pumps, with redundancy of 2/3.

Resumen: Existen diferentes metodologías para analizar la confiabilidad de un sistema, en este trabajo se describe el análisis de Markov y se hace un ejemplo evaluando y simulando la confiabilidad de un grupo de 3 bombas, con redundancia de 2/3.

Keywords: Reliability, Markov chains.

1. INTRODUCCIÓN

La historia de la confiabilidad se remonta a los primeros años 30 donde los conceptos de la probabilidad se aplicaron a los problemas relacionados con la generación de la energía eléctrica (Lyman, 1933, Dhillon, 1983). Durante la Segunda Guerra Mundial, los alemanes aplicaron los conceptos básicos de la confiabilidad para mejorar la confiabilidad de sus cohetes V1 y V2. En 1947, Aeronáuticas Radio, Inc. y la universidad de Cornell condujeron un estudio de la confiabilidad sobre 100.000 tubos electrónicos. En 1950, el departamento defensa de Estados Unidos estableció a un comité ad hoc sobre confiabilidad y en 1952 fue transformado a un cuerpo permanente: denominado Grupo consultivo de la confiabilidad de equipos electrónicos (AGREE).

Entonces la Confiabilidad en general: *se define como la probabilidad de que un sistema cumpla con la tarea asignada de forma satisfactoria en el período indicado y bajo condiciones especificadas.*

A continuación se presentan tres conceptos usados para definir la confiabilidad de Sistemas Eléctricos de Potencia.

- Es la habilidad del sistema para proveer energía eléctrica a los puntos de utilización en la cantidad requerida y con un nivel aceptable de calidad y seguridad.
- Refleja la robustez del sistema, tanto a respuestas a contingencias, continuidad del suministro, calidad del servicio prestado.
- La Confiabilidad busca el cabal cumplimiento de la función para la cual fue concebido un sistema en un periodo de tiempo especificado, sin menoscabo de su vida útil.

Estos conceptos muestran que la Confiabilidad es producto de la Seguridad que es la capacidad de respuestas a contingencias estáticas y dinámicas, La Calidad técnica y comercial junto a la continuidad del servicio y a Suficientes instalaciones para satisfacer la demanda total y las restricciones del sistema.

Hay diferentes métodos de evaluación de la confiabilidad y entre estos tenemos:

- Reducción de la Red
- Método de descomposición
- Método DELTA-ESTRELLA
- Método de conteo de partes
- Método de MARKOV

Para el cálculo de la confiabilidad hay varios tipos de distribución de la probabilidad, los mas usados son: Binomial, Poisson, exponencial, Rayleigh, Weibull, General, y Normal. En este artículo se usa para el ejemplo la distribución exponencial.

1.1 Análisis de Markov

El análisis de Markov, llamado así en honor de un matemático ruso que desarrolló el método en 1907, permite encontrar la probabilidad de que un sistema se encuentre en un estado en particular en un momento dado. Algo más importante aún, es que permite encontrar el promedio a la larga o las probabilidades de estado estable para cada estado. Con esta información se puede predecir el comportamiento del sistema a través del tiempo. Esta es una herramienta de gran alcance del análisis de la confiabilidad y puede ser utilizada en más casos que cualquier otro método. El método de Markov se utiliza extensamente para modelar sistemas con fallas y reparaciones con promedio constante. A excepción de algunos casos especiales, la técnica es aplicable a sistemas que tengan promedios de falla y reparación dependientes del tiempo. Para la solución de los problemas se plantea una cadena de Markov y un conjunto de ecuaciones diferenciales facilitando la solución de los sistemas grandes y complejos. Una cadena de Markov es una serie de eventos, en la cual la probabilidad de que ocurra un evento depende del evento inmediato anterior. En efecto, las cadenas de este tipo tienen memoria. “Recuerdan” el último evento y esto condiciona las posibilidades de los eventos futuros. Esta dependencia del evento anterior distingue a las cadenas de Markov de las series de eventos independientes, como tirar una moneda al aire o un dado. Para esto se asumen las siguientes condiciones:

1. Los eventos de transición son independientes
2. La probabilidad de transición de un estado a otro del sistema en el intervalo de tiempo finito Δt está dado por $\lambda \Delta t$, donde λ es la frecuencia de falla (o en otro caso promedio de reparación)
3. La probabilidad de que ocurra más de un evento de transición entre un estado y otro en el tiempo Δt es muy pequeña, es despreciable.

2. MÉTODO

2.1 Ecuaciones

El diagrama de espacio de estado de un sistema se muestra en la figura 1, el cual puede estar en operación normal (estado 0) o en falla (estado 1), este sistema falla con una rata de falla constante λ y también es reparado con una rata de reparación constante μ . Las ecuaciones de probabilidad del sistema son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 P_0(t + \Delta t) &= P_0(t)(1 - \lambda \Delta t) + P_1(t)\mu \Delta t \\
 P_1(t + \Delta t) &= P_1(t)(1 - \mu \Delta t) + P_0(t)\lambda \Delta t \quad \dots (1)
 \end{aligned}$$

Donde:

- t: Tiempo
- $\lambda \Delta t$: Probabilidad de que el sistema falla en un intervalo de tiempo finito Δt .
- $(1 - \lambda \Delta t)$: Es la probabilidad de que no falle en un intervalo de tiempo finito Δt .
- $\mu \Delta t$: Es la probabilidad de que el sistema sea reparado en un intervalo de tiempo finito Δt .
- $(1 - \mu \Delta t)$: Es la probabilidad de que no se repare en un intervalo de tiempo finito Δt .
- $P_0(t + \Delta t)$: Es la probabilidad de que el sistema este en el estado de operación (estado 0) en el tiempo $(t + \Delta t)$.
- $P_1(t + \Delta t)$: Es la probabilidad de que el sistema este en el estado de falla (estado 1) en el tiempo $(t + \Delta t)$.
- $P_i(t)$: Es la probabilidad de que el sistema este en estado i en el tiempo t , para $i=0,1$.

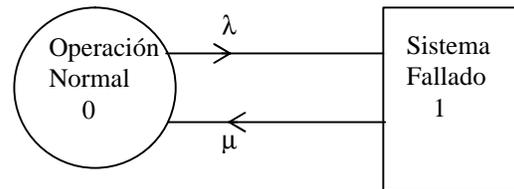


Fig.1. Sistema con dos estados:
Operación Normal y Falla

En el límite las ecuaciones anteriores nos quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \frac{dP_0}{dt} + \lambda P_0(t) &= P_1(t)\mu \\
 \frac{dP_1}{dt} + \mu P_1(t) &= P_0(t)\lambda \quad \dots (2)
 \end{aligned}$$

Y resolviendo este sistema de ecuaciones diferenciales tenemos que:

$$P_0 = \frac{m}{(I+m)} + \frac{I}{(I+m)} e^{-(I+m)t} \quad \dots (3)$$

$$P_1 = \frac{I}{(I+m)} + \frac{m}{(I+m)} e^{-(I+m)t}$$

Por lo tanto se puede comprobar que para $t \rightarrow \infty$;

$$P_0(\infty) = \frac{m}{I+m} + 0 \quad \dots (4)$$

$$P_1(\infty) = \frac{I}{I+m} + 0 \quad \dots (5)$$

$$P_0(\infty) + P_1(\infty) = \frac{m}{I+m} + \frac{I}{I+m} = 1 \quad \dots (6)$$

A partir de estas ecuaciones se aprecia que si el número de reparaciones $\mu \gg \lambda$ es mucho mayor que la frecuencia de falla, entonces la probabilidad de que permanezca en el estado funcional va en aumento hasta tender a 1. En la figura siguiente se muestra esa tendencia donde $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$.

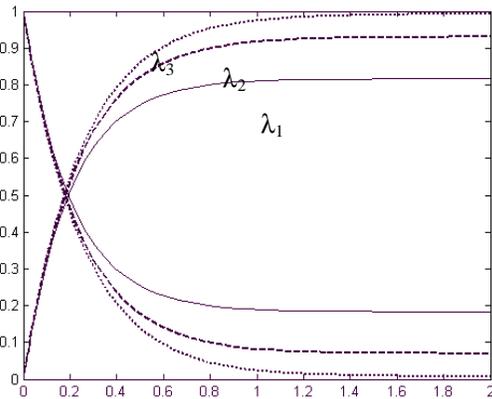


Fig. 2. Sistema de dos estados con frecuencia de fallas en disminución progresiva

3. RESULTADOS

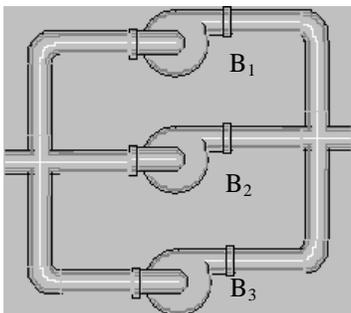


Fig. 3. Sistema de tres bombas

Para el sistema anterior se tienen los siguientes datos:

$$I_{B1} = 3 \text{ Fallas/año} \quad TTPR_{B1} = 2 \text{ Semanas}$$

$$I_{B2} = 4.1 \text{ Fallas/año} \quad TTPR_{B2} = 1.8 \text{ Semana}$$

$$I_{B3} = 3.6 \text{ Fallas/año} \quad TTPR_{B3} = 2.3 \text{ Semanas}$$

$$I_{FALLACOMUN} = 0.5 \text{ Fallas/año}$$

$$TTPR_{FALLACOMUN} = 4 \text{ Semanas}$$

Depende del número de hombres

En este ejercicio se obtendrá:

1. Modelado del Sistema
2. Simulación Dinámica
3. Resultados Análisis Interpretación.

Obsérvese que se tienen las frecuencias de falla y reparación de cada una de las bombas y de las tres a la vez. Pero no se cuentan con datos de falla y reparación de dos bombas. Existen varios criterios para la determinación de estos datos, predominando los análisis actuariales como lo propone (Moubray, 1997). Donde se propone una metodología basada en data técnica histórica que representa el comportamiento del sistema la cual es transcrita en una planilla de ruta de falla, de donde se determinan el TPPF y el TTPR. Sin embargo en este caso no contamos con datos históricos por lo tanto se utilizara para determinar la frecuencia de falla de dos bombas a la vez el esquema de redundancia de fallas.

Tomamos el sistema de las tres bombas como un sistema paralelo, donde solo son necesarios 2 de las tres para que el sistema cumpla con 100% de su función de diseño (Rocco, 2006). La confiabilidad de que sigan funcionando dos bombas de tres es:

$$R_{(2/3)} = (1-R_1Q_2Q_3) + (1-R_2Q_1Q_3) + (1-R_3Q_1Q_2) \quad \dots (7)$$

$$R_{(2/3)} = R_{(2,3)} + R_{(1,3)} + R_{(1,2)} \quad \dots (8)$$

Entonces;

$$R_{(i,j)} = 1 - R_iQ_jQ_j = e^{I_{(i,j)}t} \quad \dots (9)$$

Donde:

R_i : Confiabilidad de la bomba i , evaluada como una función de distribución exponencial $R_i = e^{-I_i t}$:

$$Q_i = 1 - R_i = 1 - e^{-I_i t}$$

$R_{(i,j)}$: Probabilidad de que sigan funcionando las bombas i y j .

A continuación en la Tabla 1 Se muestran los valores de confiabilidad R y los valores de ausencia de confiabilidad Q calculados con las ecuaciones anteriores y usados para la simulación del sistema.

Tabla 1: Datos de Confiabilidad, TPF y TPR, individuales para el cálculo de los valores por pareja.

i	λ (Fallas/año)	R	Q	μ
1	3	0,05	0,95	26
2	4,1	0,02	0,98	28,88
3	3,6	0,03	0,97	22,66
T	0,5	-	-	13

A partir de la Ecuación 9, se despeja la frecuencia de falla $I_{(i,j)}$, en la Tabla 2 se muestran los valores calculados en cada combinación. En el caso del TPR, para efectos de ejercicio se tomó el criterio del mayor tiempo de reparación de las dos bombas falladas, ya que como se explicó anteriormente, no se cuentan con suficientes datos.

Tabla 2: Datos de confiabilidad, TPR y TPF, por pareja de bombas.

i,j	$R_{(i,j)}$	$I_{(i,j)}$	$m_{(i,j)}$
2,3	0,952	0,049	22,6
1,3	0,985	0,015	22,6
1,2	0,974	0,026	26

El diagrama de espacio de estado resultante tomando en cuenta todas las posibles fallas se presenta en la Figura 4.

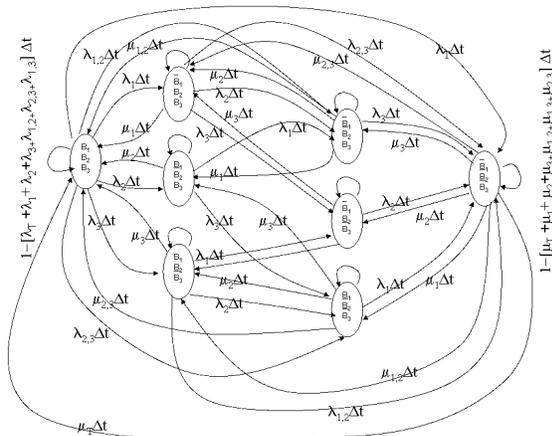


Fig. 4: Diagrama de estado

Hay que acotar que esta es una representación completa con todos los detalles de los posibles estados, sin embargo resulta que los detalles del sistema dependen del nivel de automatización. En este caso los detalles son muy importantes para mantenimiento y recuperación de la planta. En cambio un Gerente solo se interesa por los estados:

Funcional, Degradado y No Operativo, de tal forma que los detalles en cuanto a cuales son las bombas operativas o no, para El son irrelevantes. Lo que quiere decir que se podría presentar un diagrama de estado más simplificado o significativo, dependiendo del usuario final.

Otro método para exhibir las probabilidades de transición es usar una *matriz de transición*. La matriz de transición para el ejemplo del diagrama de estados se muestra en la tabla 3. Evaluando los datos de las Tablas 1 y 2 en la Tabla 3, se obtiene los elementos de la matriz del sistema, que aparecen en la Tabla 4.

Tabla 3: Forma de construir la matriz de transición de estado a partir de la Cadena de Markov

	PF	PD1	PD2	PD3	PNF1	PNF2	PNF3	PNF
PF	$-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_{1,2} + \lambda_{1,3} + \lambda_{2,3} + \lambda_{1,2,3})$	μ_1	μ_2	μ_3	$\mu_{1,2}$	$\mu_{1,3}$	$\mu_{2,3}$	μ_{τ}
PD1	λ_1	$-(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_{2,3} + \mu_1)$	0	0	μ_2	μ_3	0	$\mu_{2,3}$
PD2	λ_2	0	$-(\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_{1,3} + \mu_2)$	0	μ_1	0	μ_3	$\mu_{1,3}$
PD3	λ_3	0	0	$-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{1,2} + \mu_3)$	0	μ_1	μ_2	$\mu_{1,2}$
PNF1	$\lambda_{1,2}$	λ_2	λ_1	0	$-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{1,2} + \mu_3)$	0	0	μ_3
PNF2	$\lambda_{1,3}$	λ_3	0	λ_1	0	$-(\mu_{1,3} + \mu_1 + \lambda_2 + \mu_3)$	0	μ_2
PNF3	$\lambda_{2,3}$	0	λ_3	λ_2	0	0	$-(\mu_{2,3} + \mu_2 + \lambda_1 + \mu_3)$	μ_1
PNF	λ_{τ}	$\lambda_{2,3}$	$\lambda_{1,3}$	$\lambda_{1,2}$	λ_3	λ_2	λ_1	$-(\mu_{\tau} + \mu_{2,3} + \mu_{1,2} + \mu_{1,3} + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3)$

Tabla 4: Matriz de transición "A" de estado a partir de la Cadena de Markov

	PF	PD1	PD2	PD3	PNF1	PNF2	PNF3	PNF
PF	-11,28 84	26	28,88	22,6	26	22,6	22,6	13
PD1	3	-33,74 8	0	0	28,88	22,66	0	22,6
PD2	4,1	0	-35,49 54	0	26	0	22,6	22,6
PD3	3,6	0	0	-29,72 5	0	26	28,88	26
PNF1	0,025	4,1	3	0	-84,4 8	0	0	22,6
PNF2	0,0154	3,6	0	3	0	-75,3 6	0	28,88
PNF3	0,048	0	3,6	4,1	0	0	-77,0 8	26
PNF	0,5	0,048	0,0154	0,025	3,6	4,1	3	-161,6 8

Estableciendo el sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{P} = AP$ con los datos de la tabla 4, se tiene el conjunto de ecuaciones (10) y simulando estas ecuaciones diferenciales usando para esto, la función ODE45 de Matlab[®], se obtiene la solución numérica, mostradas en la graficas de la figura 5.

$$\begin{aligned} \dot{P}F &= -1,128PF + 26PD_1 + \dots + 22,6PNF_3 + 13PNF \\ \dot{P}D_1 &= 3PF - 33,74PD_1 + \dots + 22,6PNF \quad \dots (10) \\ \dot{P}NF &= 0,5PF + 0,048PD_1 + \dots + 3PNF_3 - 16,168PNF \end{aligned}$$

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Las respuestas de cada una de las variables de estado, se han agrupado como se esperaba en Funcional, Degradado y No Funcional. Al hacer un corte vertical en cualquier tiempo "t" la suma de las probabilidades de cada estado es igual a 1. Además el estado Funcional tiende a 1.

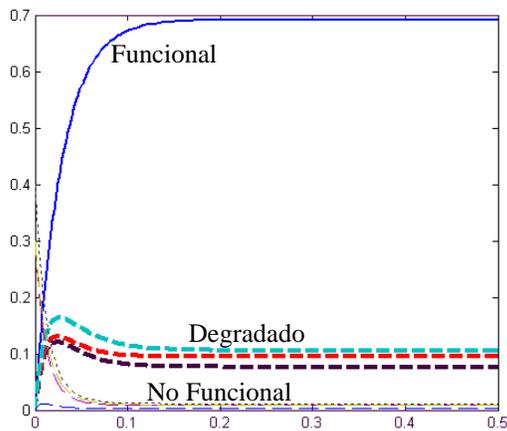


Fig.5: Simulación del espacio de estado

6. CONCLUSIONES

De la Figura 2 se observa como modificando la frecuencia de falla λ se hace que se aumente las probabilidades de que el sistema permanezca en el estado funcional. Entonces comparando con las gráficas de la figura 5, se extraen la siguiente información: si se desea la probabilidad de Degradado basta con sumar cada una de las probabilidades de degradado así también con el estado No Funcional. Que en cualquier tiempo la suma de todas las probabilidades es la unidad. La probabilidad del estado funcional tiende a la unidad. Se observa también de las graficas que si aumenta l baja la probabilidad del estado funcional, esto sirve para predecir fallas, de tal manera de que se use en la

corrección, con acciones de mantenimiento preventivo. Este trabajo permite mostrar paso a paso el procedimiento para aplicar el análisis de confiabilidad con cadenas de Markov, además el programa anexo sirve de ejemplo para la ejecución de la simulación en Matlab[®].

5. GLOSARIO

TPPF: Tiempo Promedio Para Fallar
TPPR: Tiempo Promedio Para Reparar

REFERENCIAS

- Lyman, W.J., Fundamental consideration in preparing a master system plan, *Electrical World*, 101, 778-792, 1933.
- Smith, S.A., Service reliability measured by probabilities of outage, *Electrical World*, 103, 371-374, 1934.
- Dhillon, B.S., *Power System Reliability, Safety and Management*, Ann Arbor Science Publishers, Ann Arbor, MI, 1983
- Moubray, J., *Reliability Centred Maintenance*, Butterworth Heinemann, 1997
- Rocco, T, Tema 1: Confiabilidad Industrial, Postgrado UNET, 2006.

ANEXO A:

PROGRAMA EJECUTADO EN MATLAB 5.3

```
function dy = Markov1(t,u)
dy = [-
11.2884*u(1)+26*u(2)+28.88*u(3)+22.6*u(4)+26*u(5)+22.6
*u(6)+22.6*u(7)+13*u(8);
3*u(1)-
33.748*u(2)+0*u(3)+0*u(4)+28.88*u(5)+22.66*u(6)+0*u(7)
+22.6*u(8);
4.1*u(1)+0*u(2)-
35.4954*u(3)+0*u(4)+26*u(5)+0*u(6)+22.6*u(7)+22.6*u(8)
;
3.6*u(1)+0*u(2)+0*u(3)-
29.725*u(4)+0*u(5)+26*u(6)+28.88*u(7)+26*u(8);
0.025*u(1)+4.1*u(2)+3*u(3)+0*u(4)-
84.48*u(5)+0*u(6)+0*u(7)+22.6*u(8);
0.0154*u(1)+3.6*u(2)+0*u(3)+3*u(4)+0*u(5)-
75.36*u(6)+0*u(7)+28.88*u(8);
0.048*u(1)+0*u(2)+3.6*u(3)+4.1*u(4)+0*u(5)+0*u(6)-
77.08*u(7)+26*u(8);

0.5*u(1)+0.048*u(2)+0.0154*u(3)+0.025*u(4)+3.6*u(5)+4.1
*u(6)+3*u(7)-161.68*u(8)];

[t,u]=ode45('Markov1',[0 .5],[0;0;0;.3;.3;.4;0]);

plot(t,u(:,1),t,u(:,2),t,u(:,3),t,u(:,4),t,u(:,5),t,u(:,6),t,u(:,7),t,u(:,8));
```