

**STUDY OF RAIL VEHICLE DYNAMICS IN CURVED TRACKS.  
PART II: TRANSVERSE STABILITY OF THE COACH**

**ESTUDIO DE LA DINÁMICA DE VEHÍCULOS FERROVIARIOS EN TRAMOS  
CURVOS. PARTE II: ESTABILIDAD TRANSVERSAL DEL VAGÓN**

**PhD(c). Jesús Otero Yugat**

**Universidad Politécnica de Cataluña (UPC)**, Departamento de Ingeniería Mecánica  
Avenida Diagonal, 647. Barcelona, España  
E-mail: jesus.otero-yugat@upc.edu

**Abstract:** Experience shows that, from a certain speed, a railway vehicle running in a curved track becomes unstable. In the case of the transverse union between the body of the coach and the bogie, such instability is characterized by a violent movement of the bogies, resulting in the wheel-rail contact zone important cross and normal forces, which may cause the derailment of the train. This article summarizes the theoretical and experimental analysis associated with the instability of a railway vehicle in curved tracks, with special emphasis on its dynamic and vibrating behavior.

**Resumen:** La experiencia muestra que, a partir de una cierta velocidad, un vehículo ferroviario circulando por una vía curva se vuelve inestable. En el caso de la unión transversal entre el cuerpo del vagón y el bogie, dicha inestabilidad está caracterizada por un movimiento violento de los bogies, produciendo en la zona de contacto rueda-carril fuerzas transversales y normales importantes, que pueden provocar el descarrilamiento del tren. El presente artículo sintetiza los fundamentos teóricos y experimentales asociados al análisis de la inestabilidad de un ferrocarril en tramos curvos, haciendo especial énfasis en su comportamiento dinámico y vibratorio.

**Keywords:** Instability, wheel-rail contact, cross and normal forces.

## 1. INTRODUCCIÓN

Un sistema metropolitano suburbano consta de un conjunto formado por infraestructuras ferroviarias en las que se incluyen las instalaciones fijas como el carril y las fijaciones, y por el material rodante concebido para recorrer dichas infraestructuras. La velocidad a la cual comienza a aparecer el fenómeno de inestabilidad en dicho material rodante, se conoce como velocidad crítica y delimita la máxima velocidad que puede alcanzar con seguridad total el tren.

En tales condiciones, el estudio de la estabilidad transversal de un ferrocarril a velocidades moderadas, se puede reducir con precisión a la disertación particular de un bogie [1].

En régimen estable y sobre un tramo recto de vía en óptimas condiciones, la frecuencia de lazo cinemático de un bogie con rotación débilmente amortiguada, crece linealmente con la velocidad.

No obstante, en el caso de circulación en curvas con insuficiencia de peralte, los ejes se apoyan en

el hilo exterior [2], por lo que el guiado se efectúa por medio del mismo y bajo la influencia de los defectos de alineación, motivados principalmente por el perfil de irregularidad de la cabeza del carril.

El modelado del bogie y de las suspensiones primaria y secundaria, se realiza mediante hipótesis de linealidad que abarcan la consideración de pequeños desplazamientos de masas alrededor de sus posiciones de equilibrio en reposo o en régimen permanente [2, 3].

En consecuencia, es posible adecuar los parámetros de las suspensiones en cuanto a rigidez y amortiguamiento, atendiendo a la velocidad de desplazamiento del vagón, con la finalidad de conocer la influencia de las propiedades de cada suspensión en la estabilidad general del bogie.

## 2. DINÁMICA VIBRATORIA DEL VEHÍCULO FERROVIARIO EN CURVAS

La Figura 1 representa la vista lateral del cuerpo de un coche ferroviario que circula en un tramo curvo, mientras que la Figura 2 muestra la vista frontal del mismo vagón, oscilando sobre dos sistemas elásticos amortiguados y con masas intermedias.

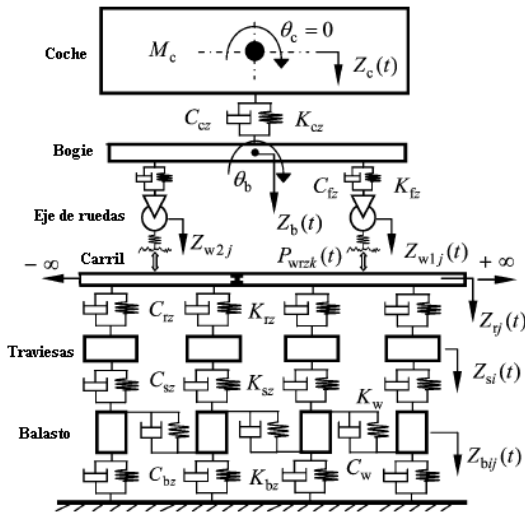


Fig. 1. Vista lateral del vagón en tramos curvos

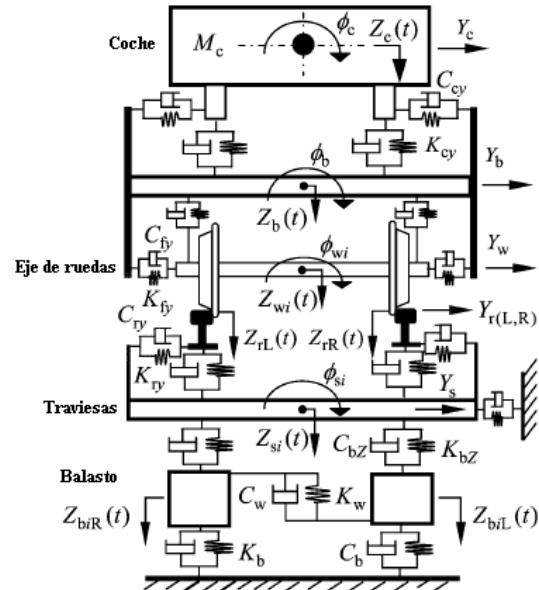


Fig. 2. Vista frontal del vagón en tramos curvos

Teniendo en cuenta las propiedades de simetría, y condiciones de linealidad en las diferentes suspensiones del modelo, las ecuaciones de movimiento lateral, vertical y angular para la mitad del vehículo ferroviario, vienen dadas por las expresiones siguientes:

$$M_C \left( \ddot{Z}_C - a_0 \mathbf{f}_{\text{sec}} - \frac{v_0^2}{R_C} \right) = -F_{zL} - F_{zR} + M_C g \quad (1)$$

$$M_C \left( \ddot{Y}_C + H_C \mathbf{f}_{\text{sec}} + \frac{v_0^2}{R_C} \right) = F_{yL} + F_{yR} + M_C g \mathbf{f}_{\text{sec}} \quad (2)$$

$$I_{Cx} (\ddot{\mathbf{f}}_{\text{sec}} + \ddot{\mathbf{f}}_c) = d_c (F_{zL} - F_{zR}) - H_B (F_{yL} - F_{yR}) \quad (3)$$

Donde  $M_C$  es la masa efectiva del vagón,  $\ddot{Z}_C$  e  $\ddot{Y}_C$  son las aceleraciones vertical y lateral del centro de inercia del mismo,  $\ddot{\mathbf{f}}_c$  es la aceleración del desplazamiento angular del vagón,  $\mathbf{f}_{\text{sec}}$  es la deflexión angular causada por la elevación del vehículo ferroviario al circular en tramos curvos,  $v_0$  es la velocidad del tren,  $H_C$  es la altura comprendida entre el centro de inercia del vagón y el punto de contacto rueda-carril,  $H_B$  es la altura presente entre el centro de inercia y la suspensión secundaria,  $d_c$  es la distancia entre las dos suspensiones secundarias,  $I_{Cx}$  es el momento de inercia del coche,  $R_C$  es el radio de curvatura de la vía,  $a_0$  es la distancia horizontal entre las dos zonas de contacto rueda-carril, mientras que  $F_{zL}$ ,  $F_{zR}$ ,  $F_{yL}$  y  $F_{yR}$ , son las fuerzas de enlace vertical y lateral entre el cuerpo del vagón y el bogie.

Los bogies son centros de percusión recíprocos el uno del otro [4], por consiguiente si se considera que una excitación externa afecta la dinámica vertical del sistema, como por ejemplo un plano de rueda, el paso por una encrucijada de vía, o bien una irregularidad severa en la rueda o en la cabeza del carril, se tiene que una perturbación cualquiera sobre el movimiento vertical de uno de ellos no tiene ninguna repercusión sobre el otro. Bajo estas condiciones, los modos propios de vibración se obtienen a partir del cálculo de los valores propios de la matriz dinámica  $D$  descrita en la Ecuación 4.

$$D^{-1} = M^{-1}K^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{k_{cz} + k_{fz}}{M_C} & -\frac{k_{fz}}{M_C} \\ -\frac{k_{fz}}{m_{\text{bogie}}} & \frac{k_{fz}}{m_{\text{bogie}}} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Dada la alta inercia y masa del vagón, generalmente se determinan frecuencias propias relativamente bajas, del orden de 1 Hz para el primero y de 5 Hz para el segundo modo propio, siendo el confort vertical en tramos curvos, dependiente de estos parámetros. Adicionalmente, basándose en el fuerte acoplamiento existente entre las ruedas y la vía, debido a la carga vertical soportada por los ejes, el mencionado confort está supeditado a la función de transferencia que caracteriza la suspensión vertical, y al espectro de densidad de potencia de los defectos de nivelación de los dos hilos de carriles.

Respecto a los movimientos transversales del vagón, cabe acotar que en alineación sobre una vía de buena calidad, dichos movimientos dependen esencialmente de las características constructivas de los bogies, mientras que en curva los mismos están influenciados por los defectos de alineación del hilo exterior. En la dirección transversal, durante la circulación en tramos curvos se producen oscilaciones libres, motivadas principalmente por los movimientos de balanceo  $\bar{q}$  y de choque lateral  $\bar{Y}$ , los cuales se encuentran acoplados, debido únicamente a la separación del plano de suspensión transversal con relación al centro de inercia del vagón. En consecuencia, las frecuencias propias acopladas del sistema formado por el balanceo y el choque lateral, se determinan mediante la formulación bicuadrática de la Ecuación 5.

$$w^4 - \left( w_1^2 + w_2^2 \right) \left( \frac{r_x^2 + h_0^2}{r_x^2} \right) - \frac{2w_1^2 h_0 (h_0 - h)}{r_x^2} w^2 + \left( w_1^2 w_2^2 \left( \frac{r_x^2 - h_0^2}{r_x^2} \right) - \frac{w_1^4 (h_0 - h)^2}{r_x^2} \right) = 0 \quad (5)$$

Donde  $r_x$  es el radio de giro respecto al eje horizontal que pasa por el centro de inercia del vagón,  $h_0$  es la separación del plano de suspensión transversal en relación al centro de inercia,  $h$  es la distancia definida entre dicho centro y el plano delimitado por la suspensión lateral, mientras que  $w_1$  y  $w_2$  se pueden hallar por medio de las expresiones siguientes:

$$w_1^2 = \frac{4k_{cy}}{M_C} \quad (6)$$

$$w_2^2 = \frac{4k_{cz}d^2 + 4k_{cy}(h-h_0)^2 - M_Cgh_0}{M_C(r_x^2 + h_0^2)} \quad (7)$$

siendo  $d$  la distancia de separación transversal entre las suspensiones laterales del bogie. Sobre la base de las generalizaciones anteriores, los modos propios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , que identifican el conjunto constituido por el balanceo y el choque lateral, se calculan a través de la Ecuación 5; mientras que el tercer modo  $\Omega_3$  asociado a la frecuencia propia del lazo del vagón, se obtiene a partir de la Ecuación 8, en la cual  $a$  representa la distancia entre los pivotes de los bogies, y  $r_z$  es el radio de giro respecto al eje vertical que pasa por el centro de inercia del vagón.

$$\Omega_3^2 = \frac{4k_{cy}(d^2 + a^2)}{M_C r_z^2} \approx w_1^2 \frac{a^2}{r_z^2} \quad (8)$$

Por otra parte, en la circulación en curvas se producen dos desviaciones independientes, a través de las cuales se puede identificar la inclinación real del vehículo ferroviario. Dichos parámetros vienen dados por  $Y_s$  o desviación transversal vinculada a la inclinación de la vía, y por  $q_s$  o ángulo de inclinación centrífuga:

$$Y_s = \frac{M_C g L}{4k_{cy} e} = \frac{gL}{w_1^2 e} \quad (9)$$

$$q_s = -\frac{M_C g h_0}{e(4d^2 k_{cz} - M_C g h_0)} \quad (10)$$

$L$  es la insuficiencia de peralte y  $e$  es la distancia de separación existente entre los carriles de la vía. Tales desviaciones se desarrollan a través de un eje de inclinación resultante, el cual está desfasado con respecto al eje normal del carril en un ángulo  $q_s$ , y presenta un desplazamiento lateral  $h_s$  definido por medio de la Ecuación 11.

$$h_s = -\frac{w_2^2}{w_1^2} \frac{h_0^2 + h^2}{h_0} \quad (11)$$

### 3. MODELADO DE LA ESTABILIDAD TRANSVERSAL DEL VAGÓN

El estudio de la estabilidad transversal de un vagón se puede clasificar en dos categorías diferenciadas: la resolución del problema geométrico en curvas y el estudio de la mecánica del ferrocarril.

#### 3.1. Geometría en tramos curvos

La Figura 3 esquematiza el paso de un coche ferroviario a través de una curva, mediante un modelo multicuerpo [2]. El razonamiento de la geometría en tramos curvos busca establecer relaciones cinemáticas entre los grados de libertad del vehículo, además de concretar la posición de los puntos de contacto, como lo son los radios de rodadura de ambas ruedas, la separación entre puntos de contacto y el ángulo de contacto entre ambas ruedas.

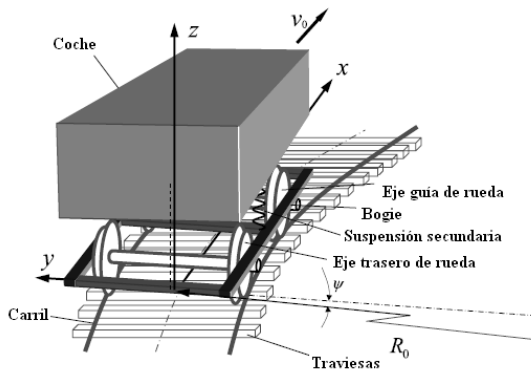


Fig. 3. Circulación de un vehículo ferroviario en curvas

La formulación de Redtenbacher [5] constituye el punto de partida para la modelación analítica de la circulación en tramos curvos. La misma describe la relación geométrica existente entre los dos puntos

de contacto rueda-carril, derivada de una aplicación de la teoría de triángulos semejantes, según se muestra en la Figura 4 y en la Ecuación 12, donde  $r$  es el radio de la rueda,  $l$  el ángulo de conicidad de la rueda y  $R_0$  el radio de curvatura de la vía.

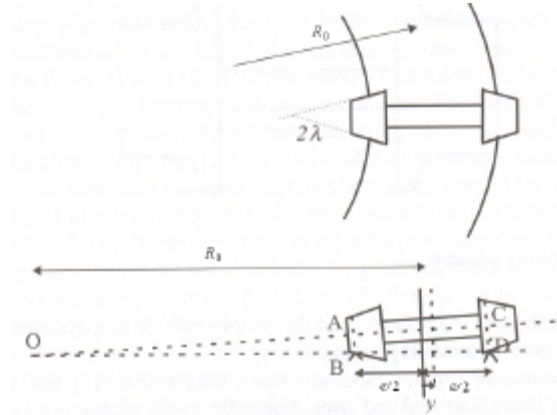


Fig. 4. Detalle de la geometría de circulación en curvas

$$\frac{r - l y}{2R_0 - e} = \frac{r + l y}{2R_0 + e} \quad (12)$$

No obstante, este postulado no profundiza en parámetros importantes y relativos al balanceo y al desplazamiento lateral del coche. En tal sentido, se han diseñado modelos equivalentes que buscan caracterizar tales aspectos, como por ejemplo la modelización por medio de un cuadrilátero articulado [5] detallada en la Figura 5. Mediante la misma es posible hallar relaciones cinemáticas que amplían los desplazamientos derivados de la dinámica vibratoria, empleando para tal fin un mecanismo articulado formado por cuatro barras de distinta longitud unidas en sus extremos.

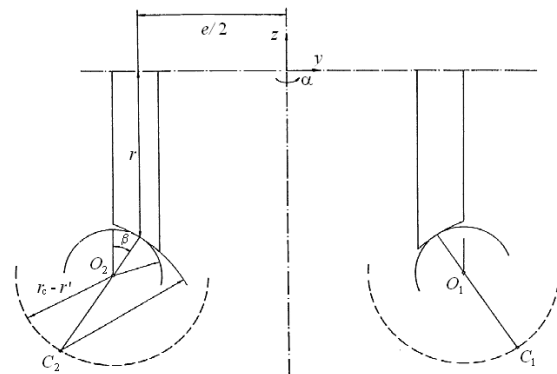


Fig. 5. Modelo del cuadrilátero articulado.

De acuerdo a este método lineal, es posible definir la conicidad equivalente  $\mathbf{g}_0$  que caracteriza por completo la geometría de contacto rueda-carril, la rigidez gravitacional lateral  $K_y$  y la rigidez gravitacional de lazo  $K_a$  que permiten precisar las fuerzas y momentos equivalentes de enlace en la zona de contacto, el coeficiente de balanceo  $\mathbf{a}$  asociado al ángulo de inclinación del plano de suspensión transversal, y la variación de los ángulos de contacto  $\Delta\mathbf{b}_0$ , según se detalla a continuación:

$$\mathbf{g}_0 = \frac{r_c \mathbf{b}}{r_c - r'} \frac{e + 2r' \mathbf{b}_0}{e - 2r \mathbf{b}_0} \quad (13)$$

$$K_y = W \left( \frac{1}{r_c - r'} \left( \frac{e + 2r' \mathbf{b}_0}{e - 2r \mathbf{b}_0} \right)^2 - (r + r_c) \left( \frac{\mathbf{b}_0}{e - 2r \mathbf{b}_0} \right)^2 \right) \quad (14)$$

$$K_a = -\frac{W}{2} (e - r \mathbf{b}_0) \mathbf{b}_0 \quad (15)$$

$$\mathbf{a} = \frac{2 \tan \mathbf{b}_0}{e - r \tan \mathbf{b}_0} y \approx \frac{2 \mathbf{b}_0}{e - r \mathbf{b}_0} y \quad (16)$$

$$\Delta\mathbf{b}_0 = \frac{1}{r_c - r'} \frac{e + r \mathbf{b}_0}{e - r \mathbf{b}_0} y \quad (17)$$

$\mathbf{b}_0$  representa las condiciones iniciales del ángulo de contacto,  $r_c$  es el radio de curvatura de la cabeza del carril,  $r'$  es la distancia comprendida entre la cabeza del carril y el centro del mismo, y  $W$  es el peso estático aplicado sobre una rueda e igual al peso propio aportado por un vagón. Algunos autores [5, 6] establecen valores límites y recomendaciones específicas para estos parámetros, dependiendo de la velocidad de circulación del tren, y atendiendo a criterios como el rozamiento de las pestañas de las pestañas de las ruedas con el hilo interno de los carriles.

El paso de un vehículo ferroviario por un tramo curvo origina un desplazamiento  $\Delta z$  de su centro de inercia, estando la variación de su altura definida como:

$$\Delta z = \mathbf{x} \frac{\Delta y^2}{2} - \frac{\mathbf{e}_0 \mathbf{b}_0}{2} \mathbf{a}^2 \quad (18)$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{r_c - r'} \left( \frac{e + 2r' \mathbf{b}_0}{e - 2r \mathbf{b}_0} \right)^2 \quad (19)$$

Siendo  $\Delta y$  la variación de desplazamiento lateral y

$\mathbf{e}_0$  un coeficiente linealizado tabulado [6] y dependiente de la velocidad de desplazamiento  $v_0$ . Existen métodos numéricos no lineales que permiten evaluar de igual forma la geometría de contacto en tramos curvos, basados en el modelado de los perfiles de la rueda y el carril a través de series matemáticas como curvas spline, y en hipótesis referidas al punto de contacto, que precisan iguales curvaturas de rueda y carril en dicho punto, así como también que ambos sólidos no pueden penetrarse entre sí. No obstante, semejantes metodologías solo simplifican y sintetizan, mediante la tecnología computacional, el procedimiento de resolución y análisis establecido por la formulación matemática expuesta.

### 3.2. Mecánica del vagón en tramos curvos

Partiendo de la Ecuación 18 derivada del estudio geométrico, se observa que si se considera el efecto del peso estático  $W$  en la situación del paso de un vagón en un tramo curvo, se puede hallar la expresión asociada al estado mecánico  $U$  de fuerzas:

$$U = -W \Delta z = -W \mathbf{x} \frac{\Delta y^2}{2} + W \frac{\mathbf{e}_0 \mathbf{b}_0}{2} \mathbf{a}^2 \quad (20)$$

A partir de la expresión previamente descrita, se obtienen dos términos dinámicos que permiten estudiar la estabilidad del vehículo ferroviario, ellos son el término  $F_{wy}$  vinculado con las fuerzas transversales actuantes sobre el eje de las ruedas, y  $\Gamma_a$  o par de rotación debido a la desigualdad de las fuerzas tangenciales laterales; ambos se definen como:

$$F_{wy} = \frac{\partial U}{\partial y} = -W \mathbf{x} \Delta y \quad (21)$$

$$\Gamma_a = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{a}} = W \mathbf{e}_0 \mathbf{b}_0 \mathbf{a} \quad (22)$$

El término  $F_{wy}$ , proporcional a la carga vertical y al desplazamiento transversal, tiene un efecto estabilizador debido a que adhiere o fija el vehículo con más intensidad en el carril en la medida en que su magnitud aumenta; por el contrario el par debido a la rotación disminuye el efecto estabilizador de la fuerza transversal, debido a que un incremento significativo de su valor se traduce como una inestabilidad capaz de provocar el descarrilamiento del vehículo ferroviario.

Una vez producido el descarrilamiento de un ferrocarril, se presenta un desacoplamiento del mismo con respecto a los carriles. Esta condición de inestabilidad puede ser evaluada con exactitud por medio del criterio de Nadal [5], visto en la Figura 6 y puntualizado por medio de la Ecuación 23, en la cual  $F$  es la fuerza de contacto rueda-carril estimada por medio de la teoría no lineal de Hertz,  $m_c$  es el coeficiente dinámico de roce en el área de contacto,  $t$  es el desplazamiento lateral de la vía calculado mediante la Ecuación 24,  $j$  es el ángulo complementario a  $q_s$ , y  $N$  es la fuerza de roce lateral.

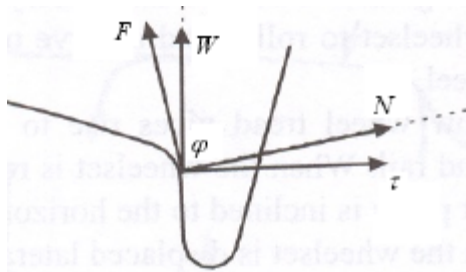


Fig. 6. Estado dinámico de la rueda usado para evaluar el descarrilamiento

$$\frac{t}{W} = \frac{\tan j - m_c}{1 + m_c \tan j} \quad (23)$$

$$t = 10000 + \frac{W}{3} \text{ [N]} \quad (24)$$

De acuerdo con el citado criterio, para que se produzcan condiciones de inestabilidad que puedan desencadenar un descarrilamiento, debe presentarse un desplazamiento lateral de la vía  $t$  mayor a la carga estática  $W$ .

Adicionalmente, cuando el vagón circula en una curva se produce un estado  $Y_T$  de resistencias pasivas al avance que pueden influir en la estabilidad general del ferrocarril. Tal estado puede deberse al rozamiento en los ejes, a la fricción presente en la zona de contacto rueda-carril, al peralte de la curva y a las oscilaciones del coche derivadas de la dinámica vibratoria. Una alternativa utilizada comúnmente en la evaluación de estas resistencias, viene dada por la formulación experimental de Davis [5], que permite incluir los efectos de la resistencia del aire a través de un coeficiente de fricción  $m_A$ .

$$Y_T = 0,27 + 18W + 0,003v_0 + 0,175 \frac{m_A v_0^2}{4W} \quad (25)$$

Bajo este mismo contexto, la expresión empírica de Desdowitz [5] permite estimar las resistencias debidas al rozamiento de las ruedas sobre los carriles, al acomodarse éstas al cambio de curvatura:

$$Y_T = 500 \frac{e}{R_0} \quad (26)$$

Estas resistencias, además de implicar pérdidas energéticas y de potencia durante el movimiento del vehículo ferroviario, afectan sensiblemente la estabilidad del mismo, debido a que originan un estado dinámico irregular e inconsistente, que puede contribuir al aumento de las fuerzas laterales capaces de superar las cargas normales, desequilibrando así el desplazamiento del tren según lo sugerido por el criterio de Nadal.

#### 4. CONCLUSIONES

Si los diversos sistemas elásticos y amortiguadores que caracterizan las suspensiones de un vehículo ferroviario presentan propiedades lineales, es posible estudiar la estabilidad transversal del vagón mediante modelos matemáticos sencillos.

Se puede optimizar la elección de los parámetros constructivos de las suspensiones de un vagón estable, que circula a diferentes velocidades a través de una vía en alineación de buena calidad.

Durante la circulación en curvas, las frecuencias propias verticales presentan una influencia similar a la ejercida por los modos transversales, por tal motivo resulta necesario elaborar un análisis tridimensional en el momento de estudiar la dinámica vibratoria del coche.

La presencia de dos desviaciones de índole estática y dinámica, demuestra que la inclinación real de un vehículo ferroviario no se realiza alrededor de su eje de inclinación interna.

La asimetría de las fuerzas tangenciales laterales produce un momento con respecto al centro del área elíptica de contacto rueda-carril, que perjudica la estabilidad transversal del coche.



## 5. REFERENCIAS

- [1] Iwnicki, S. *Simulation of wheel-rail contact forces*. Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures. 26(10), 2003, pp. 887 – 900.
- [2] Jin, X., Wen, Z., Xiao, X., Zhou, Z. *A numerical method for prediction of curved rail wear*. Multibody System Dynamics. 18(4), 2007, pp. 531 – 557.
- [3] Szolc, T. *Simulation of dynamic interaction between the railway bogie and the track in the medium frequency range*. Multibody System Dynamics. 6(2), 2001, pp. 99 – 122.
- [4] Szolc, T. *Medium frequency dynamic investigation of the railway wheelset-track system using a discrete-continuous model*. Archive of Applied Mechanics. 68(1), 1998, pp. 30 – 45.
- [5] Iwnicki, S.D. *Handbook of railway vehicle dynamics*. Taylor and Francis Group. 2006.
- [6] López Pita, A. *Infraestructuras ferroviarias*. Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya. 2006.