FREQUENCIES AND NATURAL MODES OF FREE VIBRATION WITHOUT DAMPING OF A CANTILEVER BEAM

FRECUENCIAS Y MODOS NATURALES DE VIBRACION LIBRE SIN AMORTIGUAMIENTO DE UNA VIGA EN CANTILEVER

MSc. Elkin G. Florez S., Ing. Raquel Irene Laguado R.

Universidad de Pamplona
Dpto. de Ing. Mecánica, Industrial y Mecátronica
Ciudadela Universitaria. Pamplona, Norte de Santander, Colombia.
Tel.: 57-7-5685303, Fax: 57-7-5685303, Ext. 164.
E-mail: {eflorez, raquell}@unipamplona.edu.co

Abstract: The present paper refers to the analysis of free vibrations without damping in a beam in cantilever, using an analytical development. For the solution of the partial differentials equations of second and fourth order that governs the movement of the beam, in the axial and cross-sectional direction respectively, was used the method of separation of variables and the application of the respective boundary conditions in two-way directions. For the analyzed beam, we have done the following assumptions: area of uniform section, the material of the beam is homogenous and isotropic and the existing deformations in the beam are within limits elastic. The analytical development used in the present work allows to know the mathematical principles more commonly used in the development of solutions to the problems of analysis of vibrations in continuous systems such as beams, axes, columns so on.

Resumen: Este artículo trata sobre el análisis de las vibraciones libres sin amortiguamiento de una viga en Cantilever utilizando un desarrollo analítico. Para la solución de las ecuaciones diferenciales parciales de segundo y cuarto orden, las cuales describen el movimiento de la viga. En las direcciones axial y transversal respectivamente. Fue aplicado el método de separación de variables y la condición de frontera respectiva en ambas direcciones. Para analizar la viga, se tomaron las siguientes condiciones: el área de sección es uniforme, el material de la viga es homogéneo y isotrópico, y las deformaciones existentes en la viga están en sus límites elásticos. El desarrollo analítico utilizado en este trabajo permite conocer los principios matemáticos comúnmente utilizados en las soluciones de los problemas de análisis de vibraciones en sistemas continuos como las vigas, ejes, columnas, entre otros.

Keywords: Vibration, Beam, Natural frequency, Modes of vibration, Continuous systems.

1. INTRODUCCION

Los sistemas con masas y elasticidad continua, tal como vigas, columnas, marcos y ejes, tienen un número infinito de grados de libertad, dado que, durante su movimiento se requiere de un número infinito de coordenadas para localizar la posición de las partículas que componen el cuerpo deformado.

Las vigas y los ejes, por ejemplo, pueden vibrar tanto longitudinal como transversalmente y además pueden estar sujetas a vibración torcional. Las vibraciones longitudinales se presentan a lo largo del eje horizontal y pueden ser libres o forzadas.

Por ejemplo, las vibraciones longitudinales libres pueden ser producidas por el lanzamiento repentino de una fuerza axial aplicada, y una vibración forzada es producida por la aplicación de una fuerza harmónica axial.

Las vibraciones transversales son las que ocurren en la dirección perpendicular a la dirección longitudinal y alrededor de la posición de equilibrio. Al igual que en la dirección longitudinal, se pueden presentar vibraciones libres y forzadas en esta dirección, según sea el tipo de fuerza de excitación aplicada

En el presente trabajo se estudiará los modos naturales de vibración de un viga de sección constante, empotrada en el extremo *(x=0)* y libre en otro *(x=L)* donde L es la longitud total de la viga. Se asumen deformaciones dentro del límite elástico.

El problema en términos matemáticos, se plantea haciendo uso de las leyes básicas que rigen los elementos del mismo. En mecánica de medios continuos, son las leyes de conservación de la masa y el momentum. Además, las leyes constitutivas empíricas suelen ser necesarias para relacionar ciertas variables desconocidas; algunos ejemplos son las ecuaciones de estado, la ley de Hooke entre el esfuerzo y la tensión, etc. Se formularan las ecuaciones de movimiento (longitudinal y transversal) haciendo uso de la teoría de mecánica de cuerpos deformables (elásticamente), la cual conduce a las ecuaciones de movimiento en función de las coordenadas espaciales y el tiempo.

Las ecuaciones diferenciales de movimiento junto con las condiciones de frontera asociadas, constituyen un problema de valor de frontera. El problema de valor de frontera se convierte a un problema de autovalores cuando las ecuaciones diferenciales de movimiento y las condiciones de frontera son homogéneas y dependen de un parámetro λ, y además, una solución no trivial se obtiene únicamente para ciertos valores de dicho parámetro.

En el presente trabajo el problema de la vibración transversal de una viga se usa para ilustrar un problema típico de valor de frontera y enfatizar en el significado de las condiciones de fronteras geométricas y naturales. La transferencia entre el problema de valor de frontera y el problema de autovalores se realiza por medio del método de separación de variables.

2. VIBRACION LONGITUDINAL LIBRE DE LA VIGA

Algunos de los métodos para obtener la ecuación que caracteriza el movimiento longitudinal de la viga son; el principio de Hamilton, la segunda ley de Newton y Ecuaciones de Lagrange. Consideremos una viga con propiedades uniformes en dirección axial, tal como se muestra en la siguiente figura.

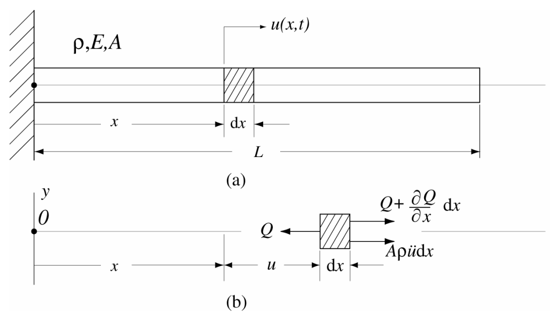

Fig. 1: (a) Modelo de una barra en vibración longitudinal, (b) Diagrama de cuerpo libre de un diferencial de la viga

Donde ***E*** es el módulo de elasticidad, ***A*** es el área de la sección transversal y r es la densidad de masa del material. Aplicando la segunda Ley de Newton al diferencial de la figura 1 (b). Tenemos:

$$Q+\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x-Q=r\,A\mathrm{d}x\,\ddot{u} \qquad (1)$$

La deformación unitaria, $e_{x,}$ esta dada por:

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x} \quad (2)$$

Asumiendo un material que se deforma dentro del límite elástico y utilizando la ley de Hooke tenemos:

$$\sigma_x=\frac{Q}{A}=E\varepsilon_x$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=EA\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} \qquad (3a,b)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1) tenemos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (4)$$

Donde *C* es la velocidad de propagación de onda $c = \sqrt{E/\rho}$. La Ecuación (4) es una ecuación diferencial parcial de segundo orden que describe el movimiento de vibración libre longitudinal no amortiguada de la viga. Encontraremos los modos naturales de vibración utilizando el método de separación de variables para la solución de (4) en la forma:

$$u(x,t) = U(x) * f(t) \qquad (5)$$

Resolviendo para *U* y *f* tenemos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = U(x)\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad (6)$$

Reemplazando (6) en (4) tenemos,

$$\frac{1}{f(t)}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{c^2}{U(x)}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad (7)$$

La ecuación anterior satisface todos los valores de *x* y *t* solo si cada lado de la ecuación es igual a una constante, y además la solución del lado izquierdo de la ecuación es de la forma:

$$T(t) = A\sin(wt + f)$$

Siendo ? la frecuencia de *f(t)*, por lo tanto tenemos,

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} + \left(\frac{w}{c}\right)^2 U(x) = 0 \qquad (8)$$
$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + w^2 f(t) = 0 \qquad (9)$$

La solución de la ecuación (8) esta dada por la expresión

$$U(x) = A\sin\left(\frac{wx}{c}\right) + B\sin\left(\frac{wx}{c}\right) \qquad (10)$$

y la solución de la ecuación (9) es

$$f(t) = C_1 \sin(wt + j) \qquad (11)$$

Las constantes *A* y *B* y la frecuencia *w* en la ecuación (10) se pueden determinar utilizando las condiciones de borde de la viga. Las constantes C_1 y *j* se pueden determinar de las condiciones iniciales del movimiento. Utilizando las ecuaciones (10) y (11) en (5) obtenemos la solución general para el desplazamiento *u(x,t)* de la viga,

$$u(x,t) = \left(A\sin\frac{\omega x}{C} + B\cos\frac{\omega x}{C}\right)\sin(\omega t + f) \quad (12)$$

La constante C_1 ha sido absorbida por *A* y *B* y las condiciones de la viga que se esta analizando en la dirección longitudinal son:

$$\text{Para:} \quad \begin{matrix} x = 0 \\ x = L \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} u(0,t) = U(0) = 0 \\ \dfrac{du(L,t)}{dx} = \dfrac{dU(L)}{dx} = 0 \end{matrix} \qquad (13a,b)$$

Usando la condición 13a en la ecuación 10 encontramos que la constante *B* es igual a cero y aplicando la condición 13b en la misma ecuación encontramos que:

$$A\cos\left(\frac{wL}{c}\right) = 0 \qquad (14)$$

Si la constante A en la ecuación anterior fuera cero la viga no vibraría longitudinalmente, por lo tanto para que halla vibración en esta dirección tenemos que

$$\cos\left(\frac{wL}{c}\right) = 0 \qquad (15)$$

Por lo tanto:

$$\frac{wL}{c} = (2n-1)\frac{p}{2} \qquad (16)$$

Reemplazando *C* en la ecuación anterior obtenemos

$$w_n = (2n-1)\frac{p}{2}\sqrt{\frac{E}{r}} \quad n = 1,2,3,\ldots.. \qquad (17)$$

La frecuencia longitudinal de vibración de la viga en hertz f_n es;

$$f_n = \frac{w_n}{2p} = \frac{(2n-1)}{2L}\sqrt{Er} \qquad (18)$$

Utilizando la ecuación (17) y (10), escribimos las formas de los modos de vibración longitudinal libre no amortiguada de la viga, la cual están dados por:

$$U_n(x) = A_n \sin\left((2n-1)\frac{px}{2L} \right) \quad n=1,2,3,\ldots \qquad (19)$$

La ecuación anterior es graficada utilizando Matlab® y reemplazando los tres primeros valores de *n*, así se muestran los tres primeros modos de vibración, longitudinal libre sin amortiguamiento, para la viga con la constante A_n normalizada, (Ver fig. 2).

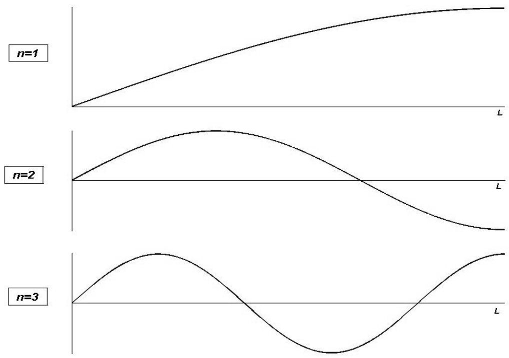

Fig. 2: Forma de los primeros 3 modos de vibración longitudinal de una viga empotrada en un extremo (x=0) y libre en el otro (x=L)

3. VIBRACION TRANSVERSAL LIBRE DE LA VIGA

Al igual que en el movimiento longitudinal, la vibración transversal de la viga puede ser libre o forzada. La ecuación diferencial del movimiento es derivada considerando el miembro de la figura 2(b) de longitud d*x* ubicada a una distancia *x* del origen O.

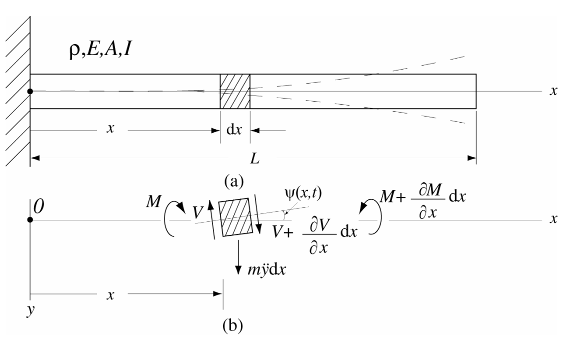

Fig. 3: (a) Modelo de una barra en vibración transversal, (b) Diagrama de cuerpo libre de un diferencial de la viga

Donde, ***E*** es el módulo de Elasticidad, ***A*** es el área de la sección transversal constante y el material es isotropito y homogéneo de densidad r.

El diagrama de cuerpo libre del elemento de la figura 2 (b). En esta figura ***M*** y ***V*** son el momento dinámico y la fuerza de corte actuando en el lado izquierdo del elemento, $m\ddot{y}dx$ es el diferencial de fuerza inercial.

El desplazamiento dinámico vertical *y(x,t)* de la viga en el punto *x* consiste de dos partes, una causada por la flexión y otra por el cortante. En el presente desarrollo se despreciará la deformación hecha por el cortante, debido a que es vibración libre, por lo tanto,

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = y\,(x,t) \qquad (20)$$

Donde $y(x,t)$ es el ángulo de rotación hecho por la flexión. Aplicando la segunda ley de newton de movimiento, tenemos:

$$V + \frac{\partial V}{\partial x} - V = m\ddot{y}dx$$

$$m\ddot{y} = \frac{\partial V}{\partial x} \qquad (21)$$

La relación entre el momento y la deformación del elemento sometido a flexión esta dado por:

$$M(x,t) = -EI\,\frac{\partial y\,(x,t)}{\partial x} \qquad (22a,b)$$

$$V = \frac{\partial M(x,t)}{\partial x}$$

Utilizando las ecuaciones anteriores y (6) tenemos:

$$\frac{EI}{m}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (23)$$

La ecuación (23) es la ecuación diferencial de la vibración transversal libre no amortiguada para el miembro de la viga.

La solución de la ecuación (23), al igual que en el movimiento longitudinal, se asume compuesta por una función *Y(x)* que varia únicamente con *x*, y una función *f(t)* que varia únicamente con el tiempo, por lo tanto tenemos;

$$y(x,t) = Y(x)\,f(t) \qquad (24)$$

Derivando y sustituyendo la ecuación (24) en la ecuación (23) obtenemos,

$$\frac{EI}{m}\frac{1}{Y(x)}\frac{\partial^4 Y(x)}{\partial x^4} = -\frac{1}{f(t)}\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} \qquad (25)$$

La ecuación (25) se satisface para todos los valores sí, y solo sí, cada lado de la ecuación es igual a una constante. Conociendo el comportamiento armónico de la función tiempo tomamos dicha constante igual a w^2, por lo tanto tenemos,

$$\frac{EI}{m}\frac{1}{Y(x)}\frac{d^4Y(x)}{dx^4}=w^2 \qquad \frac{1}{f(t)}\frac{\partial f(t)}{\partial t^2}=w^2 \tag{26a}$$

Acomodando las ecuaciones anteriores tenemos:

$$\frac{d^4Y(x)}{dx^4}-l\,Y(x)=0 \qquad \frac{d^2f(t)}{dt^2}+w^2f(t)=0 \tag{26b}$$

Donde

$$l^4=\frac{mw^2}{EI} \tag{27}$$

La ecuación (26a) es una ecuación diferencial de cuarto orden y su solución conduce a la expresión para la función $Y(x)$, el cual define la forma de los modos de vibración correspondientes a las frecuencias ω no amortiguadas libres de una viga elástica. Además la viga es un medio continuo por lo tanto obtendríamos infinitas frecuencias de vibración y por consiguiente infinito número de funciones $Y(x)$, que describen las correspondientes formas de los modos. La ecuación (26b) tiene la misma forma de la ecuación (9) y por lo tanto su solución esta dada por la ecuación (11).

La solución de la ecuación (26a) puede ser asumida de la forma,

$$Y(x)=C_2e^{yx} \tag{28}$$

Donde C_2 y y son constantes. Sustituyendo la ecuación (28) en (26 a) y ejecutando las matemáticas requeridas encontramos que,

$$y^4=l^4 \tag{29}$$

Solucionando la educación anterior y reemplazando en (28) se obtiene:

$$Y(x)=A_1\sin lx+A_2\cos lx+\cdots \; A_3\sinh lx+A_4\cosh lx \tag{30}$$

La ecuación (30) es la solución general de la ecuación (26a) que unida a la ecuación (11), forman la solución de la ecuación (23).

Para una viga uniforme de masa m y rigidez EI, tenemos:

$$y(x,t)=(A_1\sin lx+A_2\cos lx+A_3\sinh lx+ A_4\cosh lx)\sin(wt+f) \tag{31}$$

Las constantes A_1, A_2, A_3, y A_4 que además absorben a C_1 y los valores de λ se pueden determinar utilizando la ecuación anterior y aplicando las condiciones de frontera de la viga. Para el caso del presente trabajo tenemos en el extremo empotrado:

$$x=0 \qquad y(0,t)=Y(0)=0 \qquad \frac{dy(0,t)}{dx}=\frac{dY(0)}{dx}=0 \tag{32}$$

Para el extremo libre,

$$x=L \qquad \frac{d^2y(L,t)}{dx^2}=\frac{dY(L)}{dx^2}=0 \qquad \frac{d^3y(L,t)}{dx^3}=\frac{d^3Y(L)}{dx^3}=0 \tag{33}$$

Usando las anteriores condiciones de frontera obtenemos la ecuación de frecuencias el cual esta dada por,

$$\cos lL\cosh lL=-1 \tag{34}$$

El cual se puede resolver numéricamente y conduce a un conjunto de soluciones para λ, correspondiente a los autovalores λ_n la cual al ser reemplazados en la ecuación (27), permiten obtener las frecuencias naturales de vibración transversal libre no amortiguada para la viga (ω_n).

El reemplazo de λ_n en (31) permite obtener sus correspondientes autovectores o modos naturales de vibración [2].

$$Y_n(x)=A_n\begin{bmatrix}(\sin l_nL-\sinh l_nL)\\(\sin l_nx-\sinh l_nx)+\\(\cos l_nL+\cosh l_nL)\\(\cos l_nx+\cosh l_nx)\end{bmatrix} n=1,2,3,.. \tag{35}$$

Estos modos no están normalizados y constituyen un conjunto completo de autofunciones ortogonales.

4. CONCLUSIONES

El método de separación de variables en la solución de una ecuación diferencial parcial de segundo y cuarto orden, disminuye el grado de dificultad matemático del problema permitiendo convertir la ecuación parcial en dos ecuaciones diferenciales ordinarias lineales del orden de la parcial en cada variable.

Las características de la viga, como son, rigidez, masa, sección y momento de inercia, son importantes a la hora de conocer la frecuencia y la amplitud de vibración libre no amortiguada en una viga.

Las condiciones de frontera y las condiciones iniciales permiten determinar la respuesta del medio continuo en condiciones de vibración libre no amortiguada, al igual que lo hacen las características, pero además son fundamentales al describir la forma de los modos de vibración del medio continuo.

Para la obtención de la frecuencia de vibración (ecuación 34) y los modos de vibración transversal (ecuación 35) requiere una solución analítica bastante compleja, o una solución numérica que en el presente trabajo no se abordaron pero que en un futuro se podrán presentar, así como la presencia de condiciones de frontera que el problema de ingeniería requiera.

REFERENCIAS

Anderson, R. A., 1953, “Flexural Vibrations in Uniform Beams according to the Timoshenko Theory,” ASME J. Appl. Mech., 75, pp. 504–510.

Azar, L., and White, R. G., 1999, “A Semi-Analytical Approach to the Nonlinear Dynamic Response Problem of S–S and C–C Beams at Large Vibration Amplitudes. Part 1: General Theory and Application to the Single Mode Approach to Free and Forced Vibration Analysis,” J. Sound Vib., 224, pp. 183–207.

Balachandran, B and Magrab E. B. *Vibration.* Belmont USA: Thomson 2004.

Demeter G. Fertis. *Mechanical And Structural Vibrations*. New York, NY: Wiley., 1995

Leonard Meirovitch. *Analytical Methods of Vibration*. New York NY: Macmillan Publishing Co., 1967.

Mei., C. Effect of Material Coupling on Wave Vibration of Composite Timoshenko Beams, Journal of Vibration and Acoustics**,** Agosto 2005, Vol. 127 / 333.

Pain H. J. *The Physics of Vibrations and Waves.* London: Wiley., 1993

Thomson, W. T. *Teoría de Vibraciones. Aplicaciones*. México: Prentice-Hall., 1981

Timoshenko, S. P., 1922, “On the Transverse Vibrations of Bars of Uniform Cross sections,” Philos. Mag., 43, pp. 125–131.

Venkateswara Rao1, K. Meera Sabe, G. Ranga Janardhan, Concept of Coupled Displacement Field for Large Amplitude Free Vibrations of Shear Flexible, Journal of Vibration and Acoustics**,** Abril 2006, Vol. 128/251.

Woinowsky-Krieger, S., 1950, “The Effect of an Axial Force on the Vibration of Hinged Bars,” ASME J. Appl. Mech., 17, pp. 35–36.