

**MONOTONOUS INTERVALS MEMBERSHIP FOR FUZZY LOGIC CONTROLLERS****MEMBRESIA MONOTONA POR INTERVALOS EN CONTROLADORES POR  
LOGICA FUZZY**

**PhD. Antonio Faustino Muñoz Moner, PhD. Aldo Pardo García**  
**MSc. Jorge Luis Díaz Rodríguez**

**Universidad de Pamplona**

Ciudadela Universitaria. Pamplona, Norte de Santander, Colombia.

Tel.: 57-7-5685303, Fax: 57-7-5685303, Ext. 156.

E-mail: {jdiazcu, apardo13, amunozm}@unipamplona.edu.co

**Abstract:** This paper deals with the proposal of a new form for defining the membership functions based on the fuzzy concepts "*greater or equal to*", that could offer the same advantages for the adjustment of the required value of the controller command output, being significantly less the algorithm complexity and by this way, its fast real time performance.

**Resumen:** En este trabajo se propone una forma nueva de definir las funciones de membresía sobre la base del concepto difuso "*mayor o igual a*", que puede ofrecer las mismas ventajas en cuanto al ajuste del valor necesario de la salida de mando del controlador, siendo significativamente menor la complejidad del algoritmo y por ende mayor rapidez del funcionamiento en tiempo real.

**Keywords:** Fuzzy Logic, Membership Function, Performance, Fuzzy Logic Controller.

**1. INTRODUCCION**

En el momento actual los Controladores por Lógica Fuzzy transitan por una etapa del desarrollo acelerado en su fundamentación teórica y sus de aplicaciones prácticas.

La estructura algorítmica de los mismos, que podemos llamar tradicional, contiene entre sus particularidades el hecho de que la función de membresía de los subconjuntos difusos de entradas y salidas es del tipo "*aproximadamente igual a*", lo cual implica que dicha función sea simétrica en cada valor lingüístico con el máximo en el centro del intervalo correspondiente.

Las ventajas de tal definición consisten en la aplicación simplificada del procedimiento de la defuzzyficación según el *Método del Centro de Gravedad* y en la posibilidad del ajuste fino de la salida de mando aprovechando los bordes difusos y solapados de valores lingüísticos. No obstante, el algoritmo resulta complicado y puede presentar problemas en tiempo real.

**2. CONTROLADOR POR LOGICA FUZZY**

La estructura del algoritmo del Controlador por Lógica Fuzzy (FLC), expuesto en múltiples publicaciones [1,2,3,4,5], posee algunos elementos que ya se han hecho tradicionales. En primer lugar,

tanto las entradas ( $x$ ) como las salidas ( $u$ ) se dividen en subintervalos con bordes difusos, que se corresponden con valores lingüísticos definidos de una manera vaga, por ejemplo:

- Muy Alto negativo (MA-), Bajo negativo (B-), cercano al cero (Z), Mediano Positivo (M+), etc.;

Estos nombres se sustituyen por marcas numéricas en algunas aplicaciones. Además, entre dos subintervalos contiguos existe el solapamiento, que puede ser total o parcial (ver Fig. 1). Un valor de la magnitud fuzzificada puede pertenecer a ambos subintervalos, aunque con diferente membresía. Para el controlador de dos entradas  $x_1$  y  $x_2$  la situación puede ser, por ejemplo, la siguiente:

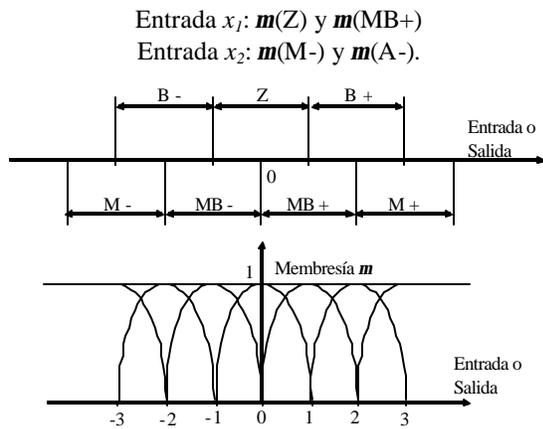


Fig. 1. Diagrama de las membresías

Entre las entradas y las salidas se establece la relación de implicación lógica, la cual permite indicar sin necesidad de cálculo el intervalo donde se encuentra el valor necesario de la salida de mando a partir de los intervalos donde hayan caído las entradas dadas, por ejemplo en el trabajo [2] se ofrece la siguiente fórmula para el controlador de dos entradas  $x_1$  y  $x_2$  y una salida  $u$ :

$$\text{IF } ((x_1 \text{ es } i) \text{ AND } (x_2 \text{ es } j)) \text{ THEN } (u \text{ es } -(i+j)) \quad (1)$$

Donde:

$i$ ,  $j$  e  $(i+j)$  son las marcas de los subintervalos correspondientes.

Para el ejemplo citado arriba con solapamiento total de intervalos la aplicación de (1) implica la necesidad de considerar cuatro combinaciones:

$$\begin{aligned} &(x_1 \text{ es } Z) \text{ AND } (x_2 \text{ es } M-) \\ &(x_1 \text{ es } Z) \text{ AND } (x_2 \text{ es } A-) \\ &(x_1 \text{ es } MB+) \text{ AND } (x_2 \text{ es } M-) \\ &(x_1 \text{ es } MB+) \text{ AND } (x_2 \text{ es } A-) \end{aligned}$$

La lógica fuzzy ofrece dos formas de calcular el operador **AND** para hallar la membresía resultante de entrada  $m$ :

1.  $m = \min(m_1, m_2)$
2.  $m = m_1 \cdot m_2$

La primera de ellas es la más aplicada debido a su sencillez, aunque provoca cierta pérdida de información, ya que sólo una de las entradas es considerada (con  $m$  mínima). La segunda está libre de esta desventaja, pero la membresía resultante es desproporcionalmente menor (el producto de dos números menores que uno es menor que el menor de ellos).

La aplicación de (1) para nuestro ejemplo daría cuatro intervalos de la salida, entre los cuales uno resultara repetido. Para determinar la membresía equivalente de intervalos repetidos, se aplica la fórmula de Lukasiewicz [1]:

$$m = \min(m_1 + m_2, 1)$$

Donde:  $m_1$ ,  $m_2$  - membresías de intervalos repetidos  
y  $m$  - membresía equivalente.

Para hallar el valor resultante de la salida de mando, se utiliza un procedimiento de defuzzyficación que desde la aparición del Método del Centro de Gravedad (Binger, 1992) se realiza según este último, que de hecho consiste en seleccionar el valor mencionado como promedio sopesado entre los valores centrales de los intervalos obtenidos anteriormente; los pesos dependen del tipo de inferencia fuzzy empleado [1].

El breve recuento de los elementos esenciales del algoritmo del Controlador Fuzzy tradicional pone fuera de toda duda su complejidad, no obstante el hecho de que sus cualidades como controlador eficiente se han demostrado en múltiples aplicaciones [1,3,5].

El análisis más detallado revela, que la causa fundamental de estas dificultades radica en el solapamiento mutuo de los bordes de subintervalos, lo cual por el otro lado parece imprescindible, dada la definición de los conjuntos fuzzy correspondientes, como aquellos cuyos elementos son aproximadamente iguales al valor central del subintervalo. Por lo tanto para mejorar el funcionamiento en tiempo real hace falta cambiar la definición de la función de membresía.

### 3. MEMBRESIA MONOTONA POR INTERVALOS

Para definir la función de la membresía de tal forma que esta resultara monótona, utilizamos el enunciado lógico difuso:

“(mayor que  $l_{min}$ ) OR (igual que  $l_{min}$ )”

Combinado con la condición lógica convencional “menor que  $l_{max}$ ”, donde  $l_{min}$  y  $l_{max}$  son los límites *mínimo* y *máximo* del subintervalo o valor lingüístico. La membresía dentro de cada subintervalo debe partir de 0 para  $l_{min}$  y llegar a 1 para  $l_{max}$ , siendo la forma de la curva ajustable según la aplicación práctica dada. Entre las curvas que se pueden utilizar para modelar la función de este tipo, se encuentran: lineal, lineal por tramos, parábola (mitad), logarítmica (para argumento mayor que 1).

El aspecto importante de tal definición de la membresía es que ésta crece junto con el valor de la variable, o sea, la membresía representa la posibilidad de que el valor de ésta última se acerque a  $l_{max}$  (ver Fig. 2), pero al mismo tiempo ningún valor puede pertenecer a más que un subintervalo, o sea el solapamiento está totalmente excluido.

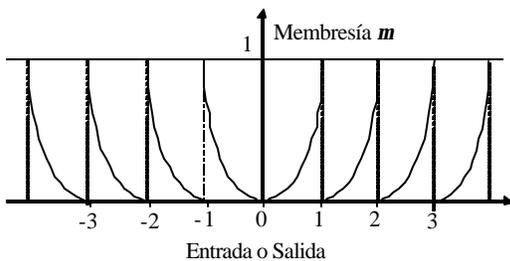


Fig. 2. Membresía monótona por intervalos

La aplicación de ecuación (1) en estas condiciones determinaría un único intervalo de la salida, dentro del cual está el valor necesario de ésta.

### 4. ANÁLISIS DEL MÉTODO DEL CENTRO DE GRAVEDAD

El método de defuzzyficación del *Centro de Gravedad* consiste en determinar el valor de la salida como la abscisa del centro de gravedad de la figura que se obtiene como resultado de aplicar la inferencia fuzzy entre los subintervalos de entradas y salidas [2].

Los tipos de inferencia de uso más frecuente son: (Mamdani, Larsen) el *Drastic Product* y el *Bounded Product*, aunque actualmente se plantea que se puede utilizar cualquier norma triangular para este fin. La fórmula de la abscisa del centro de gravedad de una figura plana es:

$$u_c = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta S_i u_i)}{\sum_{i=1}^n \Delta S_i} \quad (2)$$

Donde:

$\Delta S_i$  es el área elemental

$u_i$  es la abscisa

Para simplificar, analizaremos el caso de la membresía lineal (ver Fig.3) de un subintervalo de la salida y la inferencia fuzzy de Mamdani.

Para el controlador de dos entradas de nuestro ejemplo, a cada una de estas correspondería un único valor de la membresía que denominaremos  $m_1$  y  $m_2$ .

Aplicando **AND** según su definición más frecuente, obtenemos:

$$m = \min(m_1, m_2) \quad (3)$$

Donde:

$m$  es la membresía de entrada resultante.

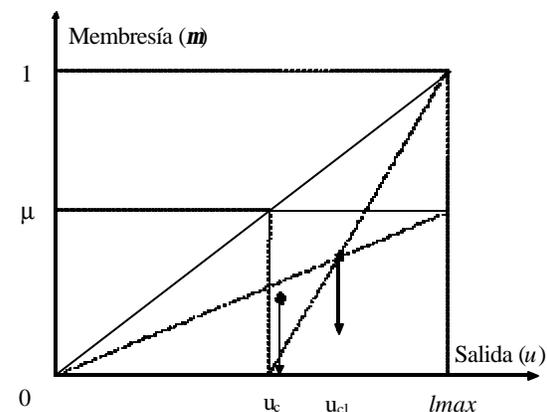


Fig. 3. Intervalo con membresía lineal monótona

Si  $m$  es igual a uno, la aplicación de la ecuación (2) daría el centro de gravedad del triángulo  $u_{c1}$ , que se encuentra en la intersección de sus medianas, a  $2/3$  del intervalo  $[l_{min}, l_{max}]$ . Si  $m < 1$ , tenemos el centro de gravedad del trapecio  $u_{c2}$ , que se calcula por la fórmula siguiente:

$$u_c = \frac{l \max(\frac{1}{2} - m - \frac{5}{6} m^2)}{1 - m + \frac{1}{2} m^2} \quad (3)$$

Es fácil de comprobar, que a medida que  $m$  disminuya, el centro de gravedad se mueve hacia el cero, pero no puede sobrepasar el punto  $l \max/2$ . Por ende, tanto el tercio superior como la mitad inferior del intervalo en cuestión queda fuera de alcance. Si adaptáramos el centro de gravedad de la figura de membresía monótona como el resultado de la defuzzyficación, nos expondríamos al peligro de saltos bruscos en la salida de mando del controlador, cuando una de entradas cambia de intervalo

### 5. ANALISIS DE LA OPERACION AND

La aplicación de la ecuación (3) para el caso de membresía monótona no proporciona resultado convincente. Tomemos como ejemplo la definición muy difundida de las entradas del controlador:

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{Ref} - \text{Var} C \\ x_2 &= \frac{dx_1}{dt} \end{aligned}$$

Donde:

*Ref*: es la referencia.

*Var C*: es la variable controlada.

Sea en un momento dado  $m_1 = m_2$ , luego  $m = \min(m_1, m_2) = m_1$ . Vamos a suponer, que en el momento (ciclo) siguiente la velocidad del error crece, entonces su membresía también crecerá:  $m_2 > m_1$ , (se supone que  $x_2$  sigue dentro del mismo intervalo). Al aplicar el AND, obtenemos:

$$m = \min(m_1, m_2) = m_1$$

O sea, la membresía resultante no cambia. Esto significa, que al realizar la defuzzyficación los quedamos con el mismo valor de la salida  $u$  del momento anterior, lo cual no es lógico, porque si el error es el mismo, pero crece más rápido, la salida de mando del controlador debe ser mayor.

Este defecto es aun mayor en caso de la membresía sin solapamiento, porque carecemos de medios para corregirlo. Resulta obvio, que para aprovechar al máximo las ventajas de la membresía monótona tenemos que elaborar otro procedimiento para obtener la membresía equivalente de entrada.

### 6. PROCEDIMIENTO PROPUESTO

Proponemos el siguiente procedimiento de defuzzyficación.

Se determina la membresía combinada  $m$  de todas las entradas como la media geométrica entre  $m_1$  y  $m_2$  para el controlador de dos entradas (a esta modalidad corresponde la ley de regulación PI que es la más frecuente de utilizar) o como la media aritmética (para mayor cantidad de entradas); con la membresía  $m$  resultante se determina el valor de la salida directamente por la curva de membresía. A continuación, se expone su fundamentación.

La media geométrica no es más que la segunda definición del **AND** fuzzy, de la cual se sustrae la raíz cuadrada para normalizar el resultado, devolviéndole las proporciones iniciales. Además, la media geométrica tiene la relación directa con la Regla de Oro, tan ampliamente utilizada en el arte y la arquitectura desde la antigüedad y cuya importancia para los procesos esenciales de la naturaleza se ha revelado hace unos años al encontrarla en la estructura de la **AND** que responde por el genotipo de los organismos vivos.

Aplicando la defuzzyficación propuesta al ejemplo anterior (ver Fig. 4), podemos apreciar, que los resultados son muy cercanos, con la ventaja de que cuando  $m = 1$ ,  $u$  llega a máximo del intervalo:

$$u = l \max$$

Mientras que el centro de gravedad para  $m = 1$  se sitúa en:

$$u_c = \frac{2}{3}(l \max - l \min) + l \min$$

El método propuesto está libre de las inconvenientes del *Método del Centro de Gravedad* y los valores de la salida de mando pueden abarcar la totalidad del intervalo  $[l \min, l \max]$  (ver Fig. 4).

La media geométrica de membresías de las entradas puede sustituirse por la media aritmética para abreviar los cálculos; como se conoce, esta última siempre es mayor que la primera, lo cual significa, que la simplificación del algoritmo por este medio equivale al leve aumento de la ganancia del controlador.

Tanto el procedimiento propuesto como sus elementos (forma de las curvas de membresía, cantidad de subintervalos, combinación de membresías de las entradas) requieren el análisis más detallado. Proponemos utilizar para este fin la simulación del sistema con controlador bajo estudio, cuyos resultados permitirían formular las recomendaciones prácticas para el uso del Controlador por Lógica Fuzzy con membresía monótona por intervalos.

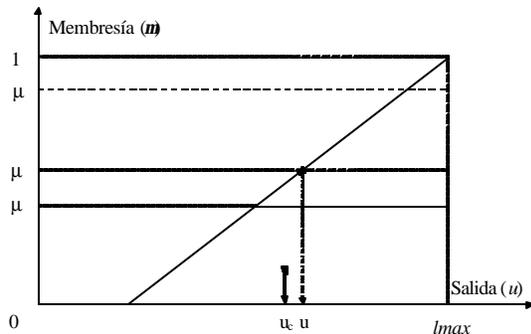


Fig. 4. Método de Defuzzificación

## 7. CONCLUSIONES

El algoritmo del Controlador por Lógica Fuzzy con membresía monótona resulta significativamente mejor con relación al tradicional en cuanto a la velocidad del procesamiento de la información sobre las variables controladas.

En este sentido son de consideración los aspectos siguientes:

- Se elimina la necesidad de analizar las combinaciones de subintervalos en controladores de varias entradas.
- No se debe comprobar la posibilidad de intervalos repetidos de la salida de mando.
- Resulta innecesario el uso del Método del Centro de Gravedad y por ende hay más libertad para seleccionar las curvas no lineales de membresía (sin limitaciones por la necesidad de calcular las áreas bajo estas curvas).
- El valor de la salida resultante no se calcula, sino se toma de la curva de membresía, que en el caso de definirse la misma como una tabla de referencia (*look-up-table*) proporciona grandes ventajas en cuanto a la velocidad en el tiempo real.

## REFERENCIAS

- [1] Hao Ying. General “Analytical Structure of Typical Fuzzy Controllers and Their Limiting Structure Theorems”. *Automatica*, Vol 29, No. 4, pp. 1139-1143, 1993.
- [2] Hao Ying. A “Nonlinear Fuzzy Controller whit Linear Control Rules is the Sum of a Global Two-dim Multilevel Relay and a local Nonlinear PI Controller”. *Automatica* Vol. 29 No. 2, pp. 499-505, 1993.
- [3] J. R. Clymer, P. D. Corey and J. A. Gardner. “Discrete Event Fuzzy Airport Control”. *IEEE Trans. On Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. 22, No. 2, 1992.
- [4] Hao Ying. “Analytical Structure of a two-input two-output Fuzzy Controller and its relation to PI and Multilevel relay Controllers”. *Fuzzy Sets and Systems*, No. 63, pp. 21-23, 1994.
- [5] A. E. Gedov and P. M. Frank. “Decomposition of multivariable systems for distributed Fuzzy Control”. *Fuzzy Sets and Systems*, No. 73 pp. 329-340, 1995.
- [6] C. M. Abdelnour et. al. “Design of a Fuzzy Controller Using Input and Output Mapping Factors”. *IEEE transaction on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. 21, No. 5, 1991.
- [7] Pardo, A; Díaz, J. L. “Fuzzy Logic Controller Design Applied to Servo-Drive Systems”. *WSEAS Transactions on Systems*, Vol. 4, No. 7, July, pp. 935 – 940, 2005.
- [8] Pardo, A; Díaz, J. L. *Fundamentos en Sistemas de Control Automático*. Universidad de Pamplona. 2004.
- [9] Li-Xin Wang, *A Course in Fuzzy Systems and Control*, 1997.
- [10] Zadeh Lofti A., “Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes”; *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*; No. 1; p. 28-44; Jan 1973.