

THREE-PHASE INDUCTION MOTOR MODELING**MODELACIÓN DEL MOTOR DE INDUCCIÓN TRIFÁSICO****PhD. Aldo Pardo García, MSc. Jorge Luis Díaz Rodríguez****Universidad de Pamplona**

Ciudadela Universitaria. Pamplona, Norte de Santander, Colombia.

Tel.: 57-7-5685303, Fax: 57-7-5685303 Ext. 156

E-mail: {jdiazcu, apardo13}@unipamplona.edu.co

Abstract: This work deals with the mathematical modeling of the three-phase induction motor, starting from its physical model. The flux, currents and voltages equations were obtained, from mathematical transformations; the torque and the mechanical equation are also obtained. These equations are expressed in different coordinated systems; obtain different expressions of the same model, depend on the selected coordinate system. Finally, the mathematical model was expressed in the state variables notation, the most suitable representation to perform simulation, and in an arbitrary coordinate system that summarizes the whole previous analysis. Also was present a mathematical model with the magnetic saturation including non lineal phenomena in the model.

Resumen: En este trabajo se obtiene el modelo matemático del motor trifásico de inducción, partiendo de su modelo físico. Se obtienen las ecuaciones de los flujos, corrientes y voltajes, a partir de transformaciones matemáticas, también se obtienen la ecuación del par y la ecuación mecánica. Estas ecuaciones se expresan en diferentes sistemas de coordenadas, obteniéndose diferentes expresiones para el mismo modelo en dependencia del sistema de coordenadas seleccionado. Finalmente se expresa el modelo matemático en la notación de variables de estado, representación más cómoda para efectuar la simulación, y en un sistema arbitrario que resume todo el análisis anterior. Al igual, se propone un modelo matemático de la máquina que tiene en cuenta el fenómeno no lineal de la saturación magnética.

Keywords: Induction Motor, Modeling, Dynamic analysis.

1 INTRODUCCIÓN

La máquina de inducción debido a sus características constructivas y su naturaleza de funcionamiento, es un sistema de significativa complejidad en términos de análisis y modelación. Siendo así, su modelaje es afectado por varias idealizaciones con el objetivo de hacerlo más simple, tanto el propio proceso de modelación, como el modelo resultante. Con este mismo objetivo, son también utilizados cambios de

variables que permiten obtener modelos más simples para el motor de inducción, sin implicar idealizaciones de la máquina.

En la literatura donde se estudia problemas del control de motor de inducción, el modelo es presentado de diversas formas distintas. Estas diferentes formas de presentación del modelo del motor de inducción se relacionan entre sí por cambios de variables y pueden obtenerse fácilmente una de otras.

En este trabajo se presenta de forma condensada el proceso de modelación del motor de inducción desde un análisis de sus características constructivas hasta la obtención del modelo utilizado en la simulación.

2 ALGUNOS ASPECTOS CONSTRUCTIVOS

El motor de inducción es un montaje concéntrico del estator y rotor, el estator es montado internamente a una carcasa que posee una base para su fijación. El rotor está montado sobre un eje sujeto en los laterales del motor.

El estator y el rotor, están compuestos de material magnético de alta permeabilidad relativa para formar un circuito de baja reluctancia. El espacio existente entre el estator y el rotor es llamado entrehierro, que es donde se concentra prácticamente toda la reluctancia del camino magnético.

La superficie del estator y del rotor están cubiertas de ranuras, donde están montadas las bobinas que componen los enrollados del estator y de rotor, respectivamente. Estos enrollados, cuando son recorridos por una corriente eléctrica, producen un campo magnético cuya interacción produce el par del motor.

El enrollado del estator está constituido de tres conjuntos de bobinas, cada una corresponde a una fase. Cada conjunto será llamado enrollado de fase a, b y c, representando a la fase que se refiere. Los enrollados de las fases a, b y c están desfasados geoméricamente de 120 grados. Generalmente estos enrollados son iguales entre sí, o sea, presentan la misma resistencia y el mismo número de espiras.

Un enrollado semejante al del estator puede estar montado sobre el rotor, caracterizando a un motor de rotor bobinado. Otra forma, más común en la práctica, es tener el enrollado del rotor constituido de barras de aluminio previamente fundidas y en cortocircuito en sus extremos. Este último caso caracteriza al motor de inducción jaula de ardilla. Y presenta varias ventajas sobre el primero en relación costo, peso, robustez, pero no permite el acceso a las variables eléctricas del rotor.

3 MODELO FÍSICO DEL MOTOR DE INDUCCIÓN

Para fines de modelación, será considerado un motor de inducción trifásico de rotor bobinado, con

P pares de polos, conectado en estrella, constituido de un enrollado simétrico en el estator, o sea compuesto de tres enrollados idénticos desfasados geoméricamente a 120 grados, y de un enrollado semejante en el rotor.

La teoría generalizada de las máquinas eléctricas introduce una serie de consideraciones con el objetivo de simplificar el proceso de modelación y también el modelo resultante. Equivale a decir que las máquinas son consideradas ideales. Las hipótesis generalmente consideradas son [O'Kelly, 1968]:

1. La saturación magnética es despreciada. Se considera válida la superposición de los flujos y todas las inductancias son consideradas independientes de la magnitud de las corrientes.
2. La distribución espacial de fuerzas magnetomotrices y del flujo en el entrehierro son consideradas sinusoidales y simétricas en relación con el eje magnético de los enrollados.
3. La distorsión en el flujo introducida por el efecto de las ranuras es ignorada. Los enrollados son considerados que están constituidos de una distribución sinusoidal de conductores de diámetros despreciable.
4. Las pérdidas por histéresis y por corrientes parásitas en el material magnético son despreciadas.

Todas estas hipótesis introducen simplificaciones en la modelación, a través de desconsideración de algún fenómeno que ocurre en la realidad. Introduciendo, asimismo, imperfección en la modelación. La hipótesis más restrictiva es, ciertamente, la desconsideración de saturación magnética. En muchos casos su efecto no puede ser despreciado. Para estos casos, algunas técnicas pueden ser utilizadas para introducir en el modelo final el efecto de saturación magnética, como se mostrará más adelante [Yi-Kang, 1985].

3.1 Ecuaciones de los flujos

Como el medio magnético es considerado lineal, podemos utilizar el principio de superposición para obtener las expresiones de los flujos. Y escribiendo de una forma matricial, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \lambda_s \\ \lambda_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & L_{sr}(\theta_r) \\ L_{sr}'(\theta_r) & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} \quad (1)$$

Donde

$$\lambda_s = \begin{bmatrix} \lambda_{as} \\ \lambda_{bs} \\ \lambda_{cs} \end{bmatrix} \quad \lambda_r = \begin{bmatrix} \lambda_{ar} \\ \lambda_{br} \\ \lambda_{cr} \end{bmatrix} \quad i_s = \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} \quad i_r = \begin{bmatrix} i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

$$L_s = \begin{bmatrix} L_{ls} + L_{ms} & -L_{ms}/2 & -L_{ms}/2 \\ -L_{ms}/2 & L_{ls} + L_{ms} & -L_{ms}/2 \\ -L_{ms}/2 & -L_{ms}/2 & L_{ls} + L_{ms} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$L_r = \begin{bmatrix} L_{lr} + L_{mr} & -L_{mr}/2 & -L_{mr}/2 \\ -L_{mr}/2 & L_{lr} + L_{mr} & -L_{mr}/2 \\ -L_{mr}/2 & -L_{mr}/2 & L_{lr} + L_{mr} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$L_{sr}(\theta_r) = L_{sr} \begin{bmatrix} \cos(\theta_r) & \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\theta_r) & \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\theta_r) \end{bmatrix} \quad (8)$$

- L_{ls} es la inductancia de dispersión correspondiente a un enrollado de una fase dada del estator. Como los enrollados son considerados iguales, la inductancia de dispersión es la misma para las tres fases del estator.
- L_{lr} es equivalente a L_{ls} en relación al rotor.
- L_{ms} es la inductancia de magnetización correspondiente a un enrollado de una fase dada del estator. También, por cuestiones de simetría, su valor es lo mismo para todas las fases del estator.
- L_{mr} es equivalente a L_{ms} en relación con el rotor.
- L_{sr} es el valor máximo de inductancia mutua entre el enrollado de una fase dada del estator o el enrollado dado de una fase del rotor.
- Los flujos así obtenidos se corresponden a los flujos concatenados en los enrollados de las fases correspondientes.

Definiendo la relación de espiras n como:

$$n = \frac{N_r}{N_s} \quad (9)$$

Pueden ser referidas las magnitudes del rotor al estator, introduciendo la relación de transformación 8 en la ecuación 1, de la cual obtenemos:

$$\lambda_s = L_s i_s + \frac{1}{n} L_{sr}(\theta_r) n i_r \quad (10)$$

$$\frac{1}{n} \lambda_r = \frac{1}{n} L_{sr}^t(\theta_r) i_s + \frac{1}{n^2} L_r n i_r \quad (11)$$

Denotando las variables del rotor referidas al estator por el supra-índice ' queda definido como:

$$\lambda_r' = \frac{1}{n} \lambda_r \quad i_r' = n i_r \quad (12, 13)$$

$$L_r' = \frac{1}{n^2} L_r \quad L_{sr}'(\theta_r) = \frac{1}{n} L_{sr}(\theta_r) \quad (14, 15)$$

Obteniéndose:

$$\lambda_s = L_s i_s + L_{sr}'(\theta_r) i_r' \quad (16)$$

$$\lambda_r' = L_{sr}'^t(\theta_r) i_s + L_r' i_r' \quad (17)$$

A partir de las definiciones anteriores obtenemos algunas identidades importantes:

$$L_{ms} = \frac{L_{mr}}{n^2} = \frac{L_{sr}}{n} \quad (18)$$

$$L_{ms} = L_{mr}' = L_{sr}', \quad L_{sr}'^2 = L_{ms} = L_{mr}' \quad (19, 20)$$

Con estas relaciones, podemos escribir las ecuaciones 16 y 17 de tal forma:

$$\begin{bmatrix} \lambda_s \\ \lambda_r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ls} & 0 \\ 0 & L_{lr}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r' \end{bmatrix} + L_{ms} \begin{bmatrix} M & V \\ V^t & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r' \end{bmatrix} \quad (21)$$

Donde:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$V = \begin{bmatrix} \cos(\theta_r) & \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\theta_r) & \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\theta_r) \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$L_{ls} = \text{diag}(L_{ls}), \quad L_{lr}' = \text{diag}(L_{lr}') \quad (24, 25)$$

3.2 Ecuaciones de las tensiones

Las expresiones obtenidas para las concatenaciones flujos en los enrollados de las fases del estator o el rotor, son obtenidas directamente de las expresiones para las tensiones de los terminales de los enrollados utilizando la relación de tensión corriente en un circuito RL y está dada por:

$$V = R i + p \lambda \quad (26)$$

Utilizando las ecuaciones 16 y 17, obtenemos, de una forma matricial,

$$\begin{bmatrix} V_s \\ V_r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_r' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_s & L'_{sr}(\theta_r) \\ L'_{sr}(\theta_r) & L_r' \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} i_s \\ i_r' \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$+ w_r \frac{\partial}{\partial \theta_r} \left(\begin{bmatrix} L_s & L'_{sr}(\theta_r) \\ L'_{sr}(\theta_r) & L_r' \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} i_s \\ i_r' \end{bmatrix}$$

3.3 Ecuación del par electromagnético

El par es producido por interacción de los flujos del rotor y del estator. Esta interacción se manifiesta en la variación de inductancia mutua del estator y del rotor en función de posición.

La expresión para el par electromagnético puede ser obtenida de las expresiones de energía almacenada en el circuito magnético a través de la relación [O'Kelly, 1968], [Krause, 1986], [Reginatto, 1993]:

$$T_e = \frac{\partial W_e}{\partial \theta_m} \quad (28)$$

Para el caso del motor de inducción, tenemos

$$W_e = i_s^t L_s i_s + i_r'^t L_r' i_r' + i_s^t L'_{sr}(\theta_r) i_r' \quad (29)$$

Sustituyendo la ecuación 25 en 24 se obtiene la expresión para el par:

$$T_e = i_s^t \frac{\partial L'_{sr}(\theta_r)}{\partial \theta_m} i_r' = \frac{P}{2} i_s^t \frac{\partial L'_{sr}(\theta_r)}{\partial \theta_r} i_r' \quad (30)$$

3.4 Ecuación mecánica

La ecuación mecánica relaciona las variables eléctricas del motor con la carga, según la segunda ley de Newton para el movimiento rotatorio.

La siguiente ecuación describe el comportamiento de la velocidad mecánica, o también la posición del rotor, en función del par electromagnético y los parámetros de la carga. En términos de la velocidad mecánica se puede escribir [O'Kelly, 1968], [Barbi, 1988], [Reginatto, 1993]:

$$J p w_m + B w_m + T_c = T_e \quad (31)$$

Donde:

- J es el momento de inercia del motor más la carga.
- B es el coeficiente de amortiguación del motor más la carga.
- T_c es el par de la carga.

Podemos también escribir 31 en términos de la velocidad angular eléctrica del rotor w_r ,

$$w_r = \frac{P}{2} w_m \quad (32)$$

$$J p w_r + B w_r = \frac{P}{2} (T_e - T_c) \quad (33)$$

3.5 Modelo físico completo

Las ecuaciones 27, 30 y 33 describen el comportamiento de un motor de trifásico de inducción de rotor bobinado de P polos, conectado en estrella y alimentado por tensión, donde se consideraron las aproximaciones del inicio de la sección.

Es importante resaltar algunas de las características notables del modelo que se obtuvo:

1. El modelo esta constituido por 7 ecuaciones dinámicas (6 ecuaciones de voltaje y una ecuación mecánica).
2. El modelo es no lineal, dado los productos de las corrientes en la ecuación del par y del producto de la velocidad angular del rotor en las ecuaciones de los voltajes.
3. El modelo es variante en el tiempo, dado que la inductancia mutua estator - rotor varía con la posición del rotor.

Estas características revelan la complejidad de este modelo e imponen la necesidad de buscar modelos más simplificados que permitan un tratamiento analítico más fácil. Esto se logra con cambios de variables sin implicar aproximación alguna.

4 SISTEMAS DE COORDENADAS ARBITRARIO

El modelo desarrollado en la sección anterior es bastante complejo para un análisis adecuado del comportamiento del motor de inducción. Esta complejidad está relacionada principalmente con el hecho de que la inductancia mutua estator - rotor es dependiente de la posición del rotor, la cual varía en el tiempo.

Una simplificación significativa del modelo del motor de inducción puede ser obtenida por la introducción de un cambio adecuado de las variables [Barbi, 1988], [Krause, 1986], [Reginatto, 1993]. Este cambio de variables consiste en referenciar las variables de sistemas trifásicos, tanto de estator o de rotor, en un mismo sistema de coordenadas compuestos de dos ejes en cuadratura y otro eje, conocido como eje de secuencia cero. Las variables del nuevo sistema de coordenadas son distinguidas por los índices d , q y o representando los ejes directos, de cuadratura y de secuencia cero, respectivamente. Este nuevo sistema de coordenadas es conocido como *sistema de coordenadas arbitrario*.

La figura 1 ilustra la relación geométrica entre los sistemas de coordenadas arbitrario y el trifásico. El sistema de coordenadas trifásicos representados por los ejes a , b y c desfasados geoméricamente de 120 grados. En la figura también se muestra el sistema de coordenadas arbitrario.

La relación entre las variables de los dos sistemas de coordenadas esta dada como a continuación se muestra [Krause, 1986], [Reginatto, 1993]:

$$f_{qdo} = K^{-1} f_{abc} \quad (34)$$

$$f_{qdo} = \begin{bmatrix} f_q \\ f_d \\ f_o \end{bmatrix} \quad f_{abc} = \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$K^{-1} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin(\theta) & \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\theta = \int w(t) dt \quad (37)$$

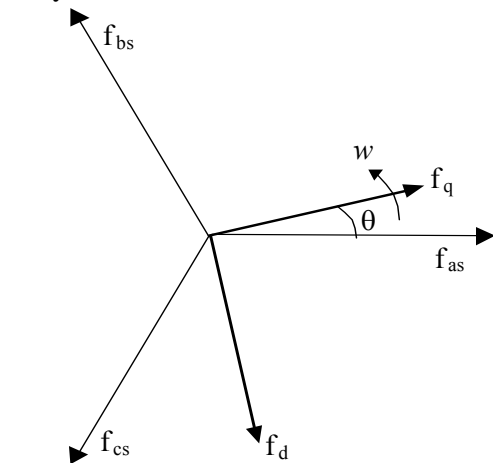


Fig. 1: Sistema de coordenadas abc y dqo

La transformada inversa esta dada por:

$$f_{abc} = K f_{qdo} \quad (38)$$

Donde:

$$K = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 1 \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Es importante notar que el ángulo θ determina la posición de sistemas de coordenadas arbitrario en relación con la trifásica. De esta forma, escogiendo adecuadamente θ , se puede referenciar tanto las variables del estator, como las variables del rotor, en mismo conjunto de ejes dq . Por tanto, es necesario considerar que los enrollados del rotor giran a una velocidad w_r , en relación con los enrollados del estator. Asimismo, la posición del sistema de coordenadas arbitrario de un sistema de coordenadas trifásico fijo en el rotor esta dado por $\theta - \theta_r$, donde:

$$\theta_r = \int w_r(t) dt \quad (40)$$

Representado por los subíndices s y r , las transformaciones de variables referentes a las variables del estator y del rotor, respectivamente, obtenemos

$$f_{qdor} = K^{-1} f_{abc} \quad (41)$$

$$f_{qdor} = \begin{bmatrix} f_{qs} \\ f_{ds} \\ f_{os} \end{bmatrix} \quad f_{abc} = \begin{bmatrix} f_{as} \\ f_{bs} \\ f_{cs} \end{bmatrix} \quad (42, 43)$$

$$K_s^{-1} = K^{-1} \quad K_s = K \quad (44, 45)$$

Lo mismo para el rotor:

$$f_{qdor} = K_r^{-1} f_{abc} \quad (46)$$

$$f_{qdor} = \begin{bmatrix} f_{qr} \\ f_{dr} \\ f_{or} \end{bmatrix} \quad f_{abc} = \begin{bmatrix} f_{ar} \\ f_{br} \\ f_{cr} \end{bmatrix} \quad (47, 48)$$

$$K_r^{-1} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\theta - \theta_r) & \cos\left(\theta - \theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin(\theta - \theta_r) & \sin\left(\theta - \theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta - \theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$K_r = \begin{bmatrix} \cos(\theta - \theta_r) & \sin(\theta - \theta_r) & 1 \\ \cos\left(\theta - \theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta - \theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\theta - \theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta - \theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \end{bmatrix} \quad (50)$$

4.1 Ecuación de los flujos

Con las transformaciones K_s y K_r , podemos obtener las ecuaciones de los flujos del motor de inducción de un sistema de coordenadas dqo . Aplicando el cambio a las variables en las ecuaciones 16 y 17 que describen los flujos, obtenemos:

$$K_s \lambda_{qdos} = L_s K_s i_{qdos} + L'_{sr}(\theta_r) K_r i'_{qdor} \quad (51)$$

$$K_r \lambda'_{qdor} = L'_{sr}(\theta_r) K_s i_{qdos} + L'_r K_r i'_{qdor} \quad (52)$$

Desarrollando en matrices:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{qs} \\ \lambda_{ds} \\ \lambda_{os} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & 0 \\ 0 & L_s & 0 \\ 0 & 0 & L_{ls} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{os} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_m & 0 & 0 \\ 0 & L_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'_{qr} \\ i'_{dr} \\ i'_{or} \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda'_{qr} \\ \lambda'_{dr} \\ \lambda'_{or} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_m & 0 & 0 \\ 0 & L_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{os} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L'_r & 0 & 0 \\ 0 & L'_r & 0 \\ 0 & 0 & L'_{lr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'_{qr} \\ i'_{dr} \\ i'_{or} \end{bmatrix} \quad (54)$$

Escribiendo de forma más compacta:

$$\lambda_{qdos} = L_{qdos} i_{qdos} + L'_{qdosr} i'_{qdor} \quad (55)$$

$$\lambda'_{qdor} = L'_{qdosr} i_{qdos} + L'_{qdor} i'_{qdor} \quad (56)$$

Donde:

$$L_m = \frac{3}{2} L_{ms} = \frac{3}{2} L'_{mr} = \frac{3}{2} L'_{sr} \quad (57)$$

$$L_s = L_{ls} + L_{ms} = L_{ls} + L_m, \quad (58)$$

$$L_r = L'_{lr} + L'_{mr} = L'_{lr} + L_m \quad (59)$$

4.2 Ecuaciones de las tensiones

El mismo procedimiento puede ser aplicado a las ecuaciones de tensiones para obtener sus ecuaciones correspondientes en el sistema de coordenadas arbitrario.

De las ecuaciones 27, obtenemos:

$$V_{abcs} = R_s i_{abcs} + p \lambda_{abcs} \quad (60)$$

$$V'_{abcr} = R'_r i'_{abcr} + p \lambda'_{abcr} \quad (61)$$

Aplicando los cambios de variables K_s y K_r en las ecuaciones 60 y 61, obtenemos:

$$V_{qdos} = K_s^{-1} R_s K_s i_{qdos} + K_s^{-1} p (K_s \lambda_{qdos}) \quad (62)$$

$$= K_s^{-1} R_s K_s i_{qdos} + (K_s^{-1} p K_s) \lambda_{qdos} + p \lambda_{qdos}$$

$$V'_{abcr} = K_r^{-1} R'_r K_r i'_{qdor} + K_r^{-1} p (K_r \lambda'_{qdor}) \quad (63)$$

$$= K_r^{-1} R'_r K_r i'_{qdor} + (K_r^{-1} p K_r) \lambda'_{qdor} + p \lambda'_{qdor}$$

Con esto, las ecuaciones de las tensiones para el motor de inducción en el sistema de coordenadas dqo quedan:

$$\begin{bmatrix} v_{qs} \\ v_{ds} \\ v_{os} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{os} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & w & 0 \\ -w & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{qs} \\ \lambda_{ds} \\ \lambda_{os} \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$\begin{bmatrix} v'_{qr} \\ v'_{dr} \\ v'_{or} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R'_r & 0 & 0 \\ 0 & R'_r & 0 \\ 0 & 0 & R'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'_{qr} \\ i'_{dr} \\ i'_{or} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & w - w_r & 0 \\ -(w - w_r) & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda'_{qr} \\ \lambda'_{dr} \\ \lambda'_{or} \end{bmatrix} \quad (65)$$

4.3 Ecuación del par electromagnético

Aplicando los cambios de variables K_s y K_r en la ecuación del par del motor de inducción y utilizando las ecuaciones 53 y 54, obtenemos:

$$T_e = \frac{3}{2} \frac{P}{2} \frac{1 - \sigma}{\sigma} \frac{1}{L_m} (\lambda_{dr} \lambda_{qs} - \lambda_{qr} \lambda_{ds}) \quad (66)$$

$$T_e = \frac{3}{2} \frac{P}{2} \frac{L_m}{L_r} (\lambda_{dr} i_{qs} - \lambda_{qr} i_{ds}) \quad (67)$$

$$\sigma = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r} \quad (\text{Coeficiente de dispersión}) \quad (68)$$

Estas son algunas de las formas posibles de obtener el par electromagnético producido por el motor de inducción en un sistema de coordenadas arbitrario dqo .

5 DIFERENTES MODELOS

Podemos notar en las ecuaciones de las tensiones en el sistema de coordenadas arbitrario, ecuaciones 64 y 65, que las tensiones del eje o es independiente de cualquier variable de los ejes d y q . De la definición de la transformación K , se puede verificar que las tensiones de alimentación del motor de inducción fueron supuestas de forma simétrica, en este caso las tensiones en el eje o serán nulas. Asimismo, haciendo esta consideración, el modelo del motor de inducción puede ser representado por ecuaciones relativas a los ejes d y q .

5.1 Modelo del motor de inducción en varios sistemas de coordenadas

Escogiendo adecuadamente la velocidad del sistema de coordenadas arbitrario w , se puede obtener características particulares en el modelo del motor de inducción. Tres casos particulares son de gran interés:

- $w = 0$ sistema de coordenadas fijo en el estator. Coincide con sistema de coordenadas estacionario o también como sistema de coordenadas $\alpha\beta$.
- $w = w_r$ sistema de coordenadas fijo en el rotor. Es poco utilizado en la literatura para motor de inducción. Sin embargo, es de mucha importancia para el motor sincrónico.
- $w = w_e$ es conocido como sistema de coordenadas sincrónico, por girar con la frecuencia sincrónica de las tensiones de alimentación.

El sistema de coordenadas sincrónica es el más utilizado en estudio del motor de inducción por presentar la importante propiedad de representar las variables sinusoidales del sistema de coordenadas trifásico por valores constantes.

El modelo del motor de inducción en el sistema de coordenadas arbitrario puede ser presentado de la forma:

$$v_{qs} = R_s i_{qs} + p \lambda_{qs} + w \lambda_{ds} \quad (69)$$

$$v_{ds} = R_s i_{ds} + p \lambda_{ds} - w \lambda_{qs} \quad (70)$$

$$v_{qr} = R_r i_{qr} + p \lambda_{qr} + (w - w_r) \lambda_{dr} \quad (71)$$

$$v_{dr} = R_r i_{dr} + p \lambda_{dr} - (w - w_r) \lambda_{qr} \quad (72)$$

$$\lambda_{qs} = L_s i_{qs} + L_m i_{qr}, \quad \lambda_{ds} = L_s i_{ds} + L_m i_{dr} \quad (73, 74)$$

$$\lambda_{qr} = L_r i_{qr} + L_m i_{qs}, \quad \lambda_{dr} = L_r i_{dr} + L_m i_{ds} \quad (75, 76)$$

$$T_e = \frac{3}{2} \frac{P}{2} \frac{L_m}{L_r} (\lambda_{dr} i_{qs} - \lambda_{qr} i_{ds}) \quad (77)$$

$$J p w_r = -B w_r + \frac{P}{2} (T_e - T_c) \quad (78)$$

$$w_m = \frac{2}{P} w_r \quad (79)$$

5.2 Modelo del motor de inducción en variables de estado

Tomando los flujos como variables de estado, puede ser obtenido el motor de inducción en variable de estado:

$$\dot{\lambda}_{qs} = -\frac{R_s}{\sigma L_s} \lambda_{qs} - w \lambda_{ds} + \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{R_s}{L_m} \lambda_{qr} + v_{qs} \quad (80)$$

$$\dot{\lambda}_{ds} = -\frac{R_s}{\sigma L_s} \lambda_{ds} + w \lambda_{qs} + \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{R_s}{L_m} \lambda_{dr} + v_{ds} \quad (81)$$

$$\dot{\lambda}_{qr} = -\frac{R_r}{\sigma L_r} \lambda_{qr} - (w - w_r) \lambda_{dr} + \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{R_r}{L_m} \lambda_{qs} + v_{qr} \quad (82)$$

$$\dot{\lambda}_{dr} = -\frac{R_r}{\sigma L_r} \lambda_{dr} + (w - w_r) \lambda_{qr} + \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{R_r}{L_m} \lambda_{ds} + v_{dr} \quad (83)$$

$$\dot{w}_r = -\frac{B}{J} w_r + \frac{P}{2} \frac{1}{J} (T_e - T_c) \quad (84)$$

$$T_e = \frac{3}{2} \frac{P}{2} \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{1}{L_m} (\lambda_{dr} \lambda_{qs} - \lambda_{qr} \lambda_{ds}) \quad (85)$$

$$w_m = \frac{2}{P} w_r \quad (86)$$

5.3 Modelo del motor de inducción en variable de estado considerando la saturación magnética

El parámetro del motor que más varía con la saturación es la inductancia mutua L_m . Una forma de considerar el efecto de la saturación es considerar L_m variante en el tiempo en función de las amplitudes de dos flujos. Un modelo mas adecuado a las ecuaciones 80 a 86 puede ser obtenido en función de los flujos del entrehierro [Yi-Kang, 1985]:

$$\lambda_{dm} = L_m (i_{ds} + i_{dr}) \quad (87)$$

$$\lambda_{qm} = L_m (i_{qs} + i_{qr}) \quad (88)$$

Reestructurando las ecuaciones 80 a 86 en función de 87 y 88, obtenemos:

$$\dot{\lambda}_{qs} = -\frac{R_s}{L_{ls}} (\lambda_{qm} - \lambda_{qs}) - w \lambda_{ds} + v_{qs} \quad (89)$$

$$\dot{\lambda}_{ds} = -\frac{R_s}{L_{ls}} (\lambda_{dm} - \lambda_{ds}) + w \lambda_{qs} + v_{ds} \quad (90)$$

$$\dot{\lambda}_{qr} = -\frac{R_r}{L_{lr}} (\lambda_{qm} - \lambda_{qr}) - (w - w_r) \lambda_{dr} + v_{qr} \quad (91)$$

$$\dot{\lambda}_{dr} = -\frac{R_r}{L_{lr}} (\lambda_{dm} - \lambda_{dr}) + (w - w_r) \lambda_{qr} + v_{dr} \quad (92)$$

$$\dot{w}_r = -\frac{B}{J} w_r + \frac{P}{2} \frac{1}{J} (T_e - T_c) \quad (93)$$

$$T_e = \frac{3}{2} \frac{P}{2} \frac{1}{L_{lr}} (\lambda_{dr} \lambda_{qs} - \lambda_{qr} \lambda_{ds}) \quad (94)$$

$$\lambda_{dm} = L_a \left(\frac{\lambda_{ds}}{L_{ls}} + \frac{\lambda_{dr}}{L_{lr}} \right) \quad (95)$$

$$\lambda_{qm} = L_a \left(\frac{\lambda_{qs}}{L_{ls}} + \frac{\lambda_{qr}}{L_{lr}} \right) \quad (96)$$

$$L_a = \frac{1}{\frac{1}{L_m} + \frac{1}{L_s} + \frac{1}{L_r}} \quad (97)$$

$$w_m = \frac{2}{P} w_r \quad (98)$$

6 CONCLUSIONES

En este trabajo fue presentado, de forma sintética, el proceso de modelaje del motor de inducción. Este desarrollo tiene como objetivo presentar al lector los conocimientos utilizados, las hipótesis consideradas, las suposiciones introducidas, etc., con el fin de mostrar la modelación del motor de inducción.

Fue presentado un desarrollo del modelo físico del motor de inducción, o sea la obtención de las ecuaciones de los flujos y de las tensiones a partir de un análisis de las características constructivas del motor.

Se dio el concepto de sistema de coordenadas y se obtuvo el modelo del motor de inducción en el sistema de coordenadas arbitrario. También se presentó una representación en variables de estado y la consideración del efecto de la saturación.

REFERENCIAS

- Barbi, I. (1988), *Introdução ao Estudo do Motor de Indução*. Universidade Federal de Santa Catarina.
- Díaz Rodríguez, J. L. (2000). *Control por campo orientado del motor de inducción con adaptación de parámetros por modelo de referencia*. Tesis de Maestría, UCLV, Cuba.
- Krause, P. C. (1986). *Analysis of Electric Machinery*, McGraw-Hill, Series in Electrical Engineering, USA.
- Leonhard, W. (1985). *Control of Electrical Drives*, Springer-Verlag, Heidelberg.
- O'Kelly, D. and S. Simmons (1968). *Introduction to Generalized Electrical Machine Theory*, McGraw-Hill Publishing Company, London.
- Pardo, A; Díaz, J. L. (2004). *Fundamentos en Sistemas de Control Automático*. Universidad de Pamplona.
- Pardo, A; Díaz, J. L. (2005). *Aplicaciones de los convertidores de frecuencia. Estrategia PWM*. Universidad de Pamplona.
- Reginato, R. & J. E. Rico (1993). *Modelagem do motor de Indução*, Nota Técnica de Laboratório – LCMI, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Yi-Kang, He & T. A. Lipo (1984). "Computer Simulation of an Induction Machine with Spatially Dependent Saturation", IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. 103, no. 4, April 1984, pp. 707-714.